岩石弹性模量贝叶斯分布估计方法与硬梁包地下洞室变形概率分析

陈　涛[1]，刘　健[2]，闫生存[1]，江　权[2]，袁超义[1]

(1. 四川华能泸定水电有限公司，四川 泸定　626100；2. 中国科学院武汉岩土力学研究所，湖北 武汉　430064)

摘　要：使用传统方法确定岩石弹性模量的概率分布需要大量的试验，这阻止了可靠度方法在地下工程中的推广。为了克服这一问题，本文结合贝叶斯框架提出了一种利用压缩波速推断岩石弹性模量概率分布的新方法。首先，用随机变量表示岩石的压缩波速和弹性模量，将传统回归模型转化为不确定模型，同时考虑了传统回归模型存在的转换不确定性。然后，将得到的不确定模型引入贝叶斯框架，在先验知识和试验数据的条件下共同确定弹性模量的后验概率分布，并引入马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)对得到的后验概率分布进行采样。将该方法应用于硬梁包水电站花岗岩的弹性模量估计，基于随机有限元法获得主厂房的位移概率分布。

关键词：贝叶斯方法；超声波检测；弹性模量；位移概率分布

中图分类号：V214.3+2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-2184(2023)01-0117-05

Method of Bayesian Distribution of Rock Elastic Modulus and Deformation Probability of Underground Cavity in Yingliangbao Hydropower Project

CHEN Tao[1], LIU Jian[2], YAN Shengcun[1], JIANG Quan[2], YUAN Chaoyi[1]

(1. Sichuan Huaneng Luding Hydropower Co., Ltd., Luding Sichuan 626100;
2. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan Hubei 430064)

Abstract: Establishing the probability distribution of the elastic modulus using traditional methods requires extensive trials, which prevents the generalization of reliability methods in underground engineering. To overcome this problem, we propose a new method to infer the probability distribution of the elastic modulus of rocks using the compressed wave velocity, combined with a Bayesian framework. First, the compressed wave speed and elastic modulus of the rock are expressed by random variables to transform the traditional regression model into an uncertain model, while considering the conversion uncertainty of the traditional regression model. Then, the resulting uncertainty model is introduced into a Bayesian framework to jointly determine the posterior probability distribution of the elastic modulus under both prior knowledge and trial data, and a Markov Chain Monte Carlo(MCMC) is introduced to sample the resulting posterior probability distribution. Finally, the proposed method is applied to the elastic modulus estimation of the granite in Yingliangbao Hydropower Project to obtain the displacement probability distribution of the main plant based on the stochastic finite element method.

Key words: Bayesian method; Ultrasonic detection; Elastic modulus; Displacement probability distribution

1　概　述

为了提高地下工程结构的安全性，进行更精细化的设计，基于概率的设计方法越来越受到重视。在此过程中，岩体弹性模量在预测地下洞室开挖变形[1]、支护结构的选择和设计[2-3]、隧道稳定性评估等中起着重要作用[4]。岩石是一种天然物质，在其形成过程中受到历史地质作用的影响。岩石中会存在各种缺陷，如裂纹、微孔、裂缝等，这些缺陷对岩石的弹性模型有很大的影响，弹性模量在同一建设场地的不同位置都存在变异性[5]。因此，使用弹性模量(E_s)分布来描述岩石的变形特性比使用某个确定值(例如试验数据的平均值)更合理。

文章开发了一种基于贝叶斯理论的方法，利

收稿日期：2022-08-05
受华能集团总部科技项目：HNKJ21－HF317《复杂构造背景下大型洞群物理数值仿真与动态设计研究》技术研究资助。

用岩块压缩波速 V_p 来评估岩石的弹性模量 E_s。并且在建立统计模型的过程中，定量地考虑了模型的转换不确定，并引入先验知识来补充模型中包含的信息，使该方法在小样本条件下具有明显的优势。此外，结合马尔可夫链蒙特卡罗方法(MCMC)从概率模型中提取样本，可以方便地估计弹性模量的概率分布。最后，结合随机有限元法和蒙特卡罗模拟，获得了硬梁包主厂房的开挖位移概率分布。

2　岩石弹性模量推断的贝叶斯方法

将基于贝叶斯理论，建立了描述岩石弹性模量不确定性的 V_p 和 E_s 之间的不确定性模型，并考虑了回归模型的转换不确定性。

2.1　V_p 和 E_S 的不确定模型

大量试验表明，岩石弹性模量服从对数正态分布[7,10]，使用对数正态分布的另一个优点是不会产生负值。因此，弹性模量的分布一般可定义为式(1)[18]：

$$E_s=\exp(\mu_N+\sigma_N z) \tag{1}$$

其中，随机变量 z 为标准正态分布，参数 μ_N 和 σ_N 是 $ln(E_s)$ 的平均值和标准差，可根据下式计算：

$$\mu_N=ln(\mu)-1/2\ \sigma_N^2 \tag{2}$$

$$\sigma_N=\sqrt{(ln(1+\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2)} \tag{3}$$

μ 和 σ 是弹性模量 E_s 的均值和标准差。对公式(1)两边取对数得到：

$$\ln(E_s)=\mu_N+\sigma_N z \tag{4}$$

许多研究人员在 E_s 和 V_p 之间建立了不同形式的回归模型。例如，Moradian 和 Behnia 采集了大量岩石样本，包括 44 个石灰岩样本、12 个砂岩样本和 8 个泥灰岩样本，并利用幂指数函数建立了回归方程，V_p 和 E_S 的回归关系(Moradian and Behnia，2009)见图 1。

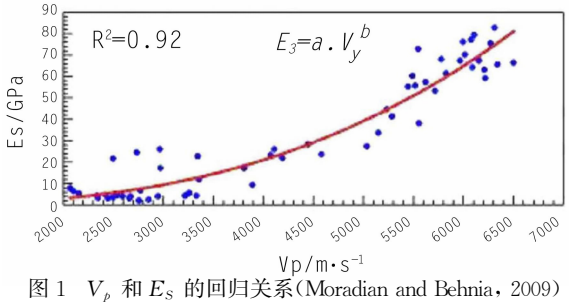

图 1　V_p 和 E_S 的回归关系(Moradian and Behnia，2009)

回归公式的具体形式如式(5)：

$$E_s=aV_p^b \quad a=2.06 \quad b=2.78 \tag{5}$$

等式(5)可以利用对数形式改写为等式(6)：

$$\ln(V_p)=a'\ \ln E_s+b'+\varepsilon \tag{6}$$

其中，a'和b'为新的对数模型参数，分别等于 0.359 7 和−0.26；ε 用于描述回归模型的输出变量和试验结果之间的差异，即转换不确定性。值得注意的是，转换不确定性来源于理论关系的简化，这与参数不确定性不同。

然后，将公式(1)代入公式(6)，得到公式(7)：

$$\ln V_p=(a'\mu_N+b')+a'\sigma_N z+\varepsilon \tag{7}$$

式中　$\ln V_p$ 式高斯随机变量，其均值为 $a'\mu_N+b'$，标准差为 $\sqrt{((a'\sigma_N)^2+(\sigma_\varepsilon)^2)}$。式(7)是 V_p 和 E_s 之间的不确定性模型，包括参数不确定性和转换不确定性。

2.2　贝叶斯框架获得弹性模量概率分布

在获得不确定度模型后，将研究如何使用实际测量数据结合多源信息估计弹性模量 E_s 的分布。为了引入贝叶斯公式，首先使用全概率对不确定模型进行转换，如公式(8)所示：

$$P(E_s\mid Data,Prior)=\int P(E_s\mid\mu,\sigma)\times P(\mu,\sigma\mid Data,\ Prior)d\mu d\sigma \tag{8}$$

式中　$P(E_s\mid Data,Prior)$是基于先验知识和试验数据的弹性模量的概率分布。$P(E_s\mid\mu,\sigma)$是基于均值和标准差定义的弹性模量的概率分布，$P(\mu,\sigma|Data,\ Prior)$是弹性模量 E_s 的均值和标准差的联合概率分布。其中，弹性模量 E_s 是服从对数正态分布的变量，可以定义为：

$$P(E_s\mid\mu,\sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\ \sigma_N\ E_s)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln(E_s)-\mu_N}{\sigma_N}\right]^2\right) \tag{9}$$

$P(\mu,\sigma|Data,\ Prior)$中包含波速 V_p 的先验知识和测量数据，可以通过贝叶斯公式展开：

$$P(\mu,\sigma\mid Data,Prior)=K\times P(Data\mid\mu,\sigma)\times P(\mu,\sigma) \tag{10}$$

公式(10)中，K 是一个正则化常数。

$P(\mu,\sigma)$称为先验知识。在获得试验数据之前，或多或少拥有一些关于模型参数的信息，这些额外的信息称为先验知识，利用贝叶斯框架可以组合不同来源的信息来补充模型中数据的信息。如果事先获得的信息量很少，则可以采用大范围

的均匀分布，称为模糊先验。均匀分布的先验分布可以定义为：

$$P(\mu,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{\mu_{\max}-\mu_{\min}}\times\frac{1}{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}} & \mu\in(\mu_{\min},\mu_{\max})\ and\ \sigma\in(\sigma_{\min},\sigma_{\max})\\ 0 & others\end{cases} \tag{11}$$

式中　$\mu_{\min}$，$\mu_{\max}$ 是 E_s 的平均值的最小值和最大值，$\sigma_{\min}$，$\sigma_{\max}$ 是 E_s 的标准差的最小值和最大值，两者都需要由工程师根据自己的经验和研究确定。

$P(Data\mid\mu,\sigma)$称为似然函数，定义了模型产生或者获得数据的概率。根据第二节的定义，$Data=\{\ln(V_{pi}),\ i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N\}$是波速 V_p 的自然对数值。由于 V_p 是在从特定地点或具有一定距离的钻井岩芯采集的岩石上测量的，因此 V_{pi} 之间的相关性可以视为独立或弱相关性，也就是说，V_{pi} 是独立的正态随机变量，联合概率密度可以表示为 V_{pi} 的每个单独概率密度的乘积，可能性定义为：

$$P(Data\mid\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n_s}\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sqrt{((a'\sigma_N)^2+(\sigma_\varepsilon)^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\ln(V_{pi})-(a'\mu_N+b')}{\sqrt{(a'\sigma_N)^2+(\sigma_\varepsilon)^2}}\right]\right\} \tag{12}$$

结合公式(8)到公式(12)可以得到后验分布的表达式：

$$P(E_s\mid Data,Prior)=K\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N E_s}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(E_s)-\mu_N}{\sigma_N}\right]^2\right)\times\prod_{i=1}^{n_s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(a'\sigma_N)^2+(\sigma_\varepsilon)^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(V_{pi})-(a'\mu_N+b')}{\sqrt{(a'\sigma_N)^2+(\sigma_\varepsilon)^2}}\right]\right\}\times\frac{1}{\mu_{\max}-\mu_{\min}}\times\frac{1}{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}d\mu d\sigma \tag{13}$$

MCMC 已经成为贝叶斯分析方法的一种有效手段，可以处理各种复杂的概率分布。从 MCMC 获取的样本称为 MCMC 样本。

3　方法应用

3.1　工程场地介绍及弹性模量评估

硬梁包水电站是大渡河流域重要的水电工程之一，位于四川省甘孜藏族自治州泸定县，在促进甘孜州社会经济发展方面发挥着重要作用。厂址区位于大渡河左岸花石堡上游约 1 km 处。岩性以花岗岩、闪长岩为主，属中硬～硬岩，具备修建大型洞室的条件。该工程采用引水式水电站，地下厂房采用圆拱直墙形式，顶拱跨度 28.20 m，岩壁吊车梁下跨度 25.40 m，最大高度 67.15 m。地下厂房设计为七个开挖层。根据 6 组应力消除法的地应力试验，实测最大主应力为 10.8～24.7 MPa，中间应力为 6.3～12.9 MPa，最小主应力为 3.2～6.7 MPa，最大主应力方向为 N60°W～S80.9°W，属于中高应力。

岩石样本取自主厂房二层中间位置，均为花岗岩。共制作岩芯样本数量为 12 个，样本大小为高 100 mm，直径 50 mm。在单轴压缩试验之前，先使用超声波试验仪试验岩样的压缩波速 V_p。试验结果表明：最小波速为 2.518 km/s，最大波速为 3.712 km/s，平均波速为 3.016 km/s，标准差为 0.343 km/s。然后，对 12 个岩石样本进行单轴压缩试验，以试验弹性模量 E_s。试验结果表明，最小值为 30.69 GPa，最大值为 50.69 GPa，平均值为 37.04 GPa，标准差为 5.75 GPa。

然后对这 12 组数据进行回归分析，得到压缩波速与弹性模量的回归方程。回归方程为 $E_s=10.467V_p^{1.144}$。该模型决定系数 R^2 仅为 0.686，较小的决定系数表明硬梁包花岗岩的弹性模量离散程度较大。

为了利用提出的方法推断硬梁包花岗岩的参数，对大量的文献和数据进行了调查和研究。通过对附近地区工程测量数据的对比分析，决定采用正态先验。设置花岗岩弹性模量的平均值服从正态分布，平均值为 40 GPa，标准差为 10 GPa（即 $\mu_{E_s}\sim Normal(40,\ 10^2)$），花岗岩的标准差遵循正态分布，平均值为 10 GPa，标准差为 5 GPa（即 $\sigma_{E_s}\sim Normal(10,\ 5^2)$）。花岗岩试验数据曲线拟合见图 2。

测得花岗岩的平均弹性模量为 39.2 GPa，标准差为 6.41 GPa。这与直接从 12 个单轴压缩试验数据获得的弹性模量参数不同（平均值为 37.04 GPa，标准值为 5.75 GPa）。弹性模量 MCMC 样本柱状图见图 3。

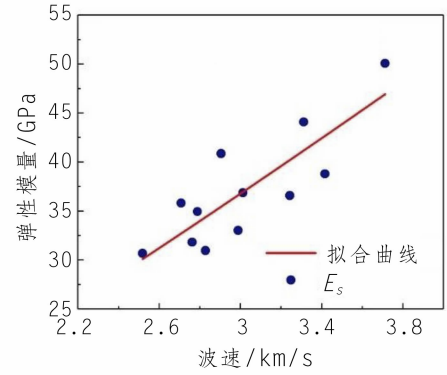

图 2　花岗岩试验数据曲线拟合

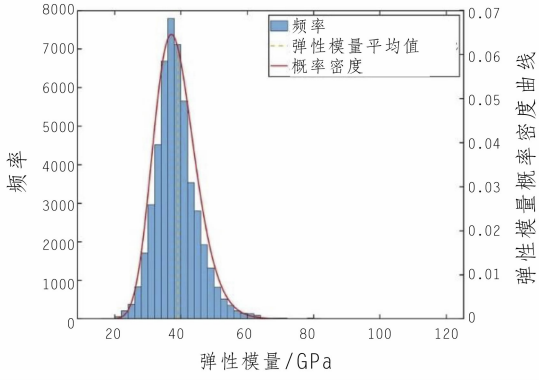

图 3　弹性模量 MCMC 样本柱状图

这些参数来自于完整岩芯试样，但实际的地下洞室工程位于节理裂隙遍布的岩体中。因此，完整岩石和工程岩体之间的参数折减是必要的。在实践中，通常使用基于 GSI（地质强度指数）的 Hoek－Brown 准则进行折减。花岗岩 Hoek－Brown 准则参数见表 1。

表 1 中，地质强度指数（GSI）可以使用经验

表 1　花岗岩 Hoek－Brown 准则参数表

GSI	D	σ_{ci}/GPa	γ /kN·m^{-3}	m_i
51	0.5	0.2	27	32

公式 $GSI=15V'_p-7.5$ 进行估算，其中 V'_p 是现场波速，其平均值约为 3.9 km/s。D 是扰动系数，对于硬岩中质量相对较差的爆破，扰动系数等于 0.5。σ_{ci} 是单轴抗压强度，根据单轴压缩试验，其平均值为 200 MPa。m_i 是一个与岩性相关的模型参数，对于花岗岩，该参数可设置为 32。γ 是岩石的重力，等于 27 kN/m^3。根据上述参数得出的岩体弹性模量为 11.98 GPa，等效黏聚力为 14.12 MPa，等效内摩擦角为 40.6°。因此，假设从岩石到岩体的弹性模量折减系数等于 0.375，即 11.98 除以 39.2。将每个 MCMC 样本乘以折减系数，得出岩体弹性模量为 11.98 GPa，标准差为 2.40 GPa。

3.2　地下厂房变形概率评估

根据得到的弹性模量分布，建立了地下厂房的随机有限元计算模型（RFEM）。假设岩体在水平和垂直方向的自相关距离均为 5 m。拱肩处的点 A 和 B 是在项目现场安装多点位移计的位置，也是记录随机有限元模型中开挖历史位移的点。不同的颜色表示不同的参数值，颜色越深表示弹性模量越大，颜色越浅表示对应元素中的弹性模量越小。随机有限元模型共设置四个开挖步，第一步为中导洞开挖，第二至第四个台阶分别对应主厂房第一至第三层开挖。主厂房开挖轮廓线及随机实现见图 4。

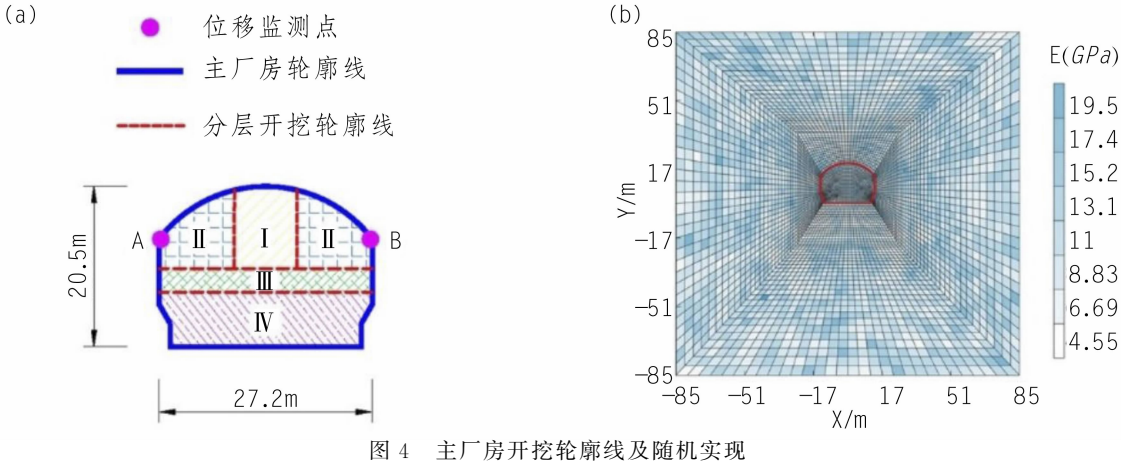

图 4　主厂房开挖轮廓线及随机实现

总计进行了 5 000 次蒙特卡罗计算，以确保开挖位移统计的足够精度，当计算次数达到 5 000 次时，各开挖步骤的平均值保持足够稳定。不同蒙特卡洛计算次数时 B 点平均位移见图 5。不同

开挖步监测点位移见图 6。

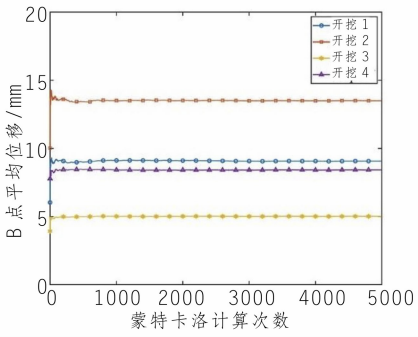

图 5　不同蒙特卡洛计算次数时 B 点平均位移

计算完成后，在监测点 A 和 B 提取每个开挖步骤的相对位移（即每个开挖步骤的绝对位移减去前一个开挖步骤的绝对位移），并进行统计分析。结果表明，A 点和 B 点的最大平均位移发生在第二次开挖阶段（即主厂房第一层开挖），最小平均位移发生在第三次开挖阶段（即主厂房第二层开挖），因为第二层的开挖厚度最小。同时，第二个开挖台阶的位移离散度最大（可以通过小提琴图中的 KDE 曲线反映），第二个开挖台阶在 B 点的位移最大可能接近 40 mm。

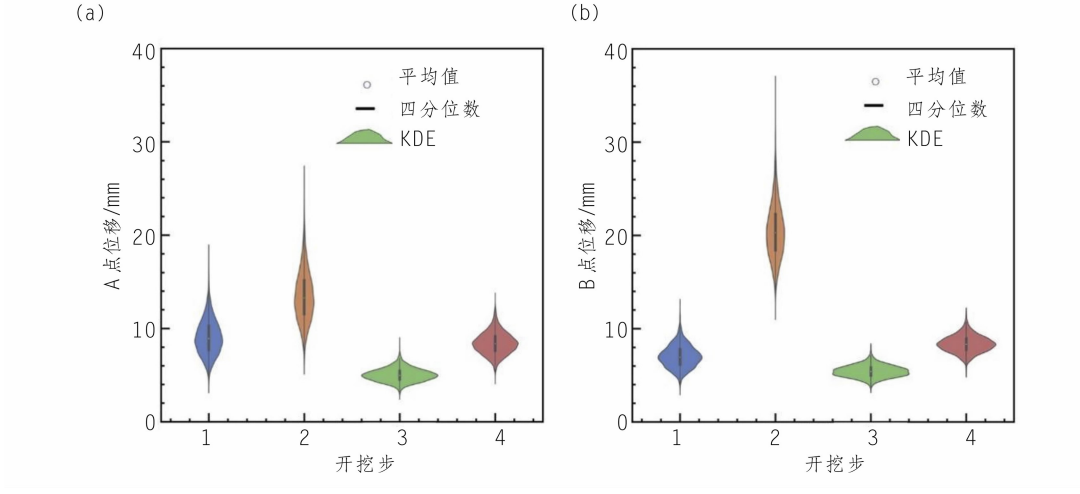

图 6　不同开挖步监测点位移

4　结　语

将传统的 E_s—V_p 回归模型引入贝叶斯框架，提出了一种估算岩石弹性模量分布的方法。该方法在小样本条件下获得有意义的统计参数方面具有明显优势，因此在中小型项目中推广基于概率的设计方法具有重要意义。与传统的回归方法相比，该方法得到的岩石弹性模量分布结果更接近于大量室内试验的统计结果。

建立了 E_s—V_p 的概率模型，推导了 E_s 的分布，分析了不同输入数据量对评价结果的影响。进一步证明了该方法在小样本条件下的优势。通过室内试验和提出的方法，得到了硬梁包水电站花岗岩的弹性模量分布，并结合有限元的计算方法，获得了主厂房的开挖位移概率分布。

参考文献：

[1]　孙亚飞，王军，于明洋. 铁路隧道巨型溶洞稳定性评估与施工防护棚架设计[J]. 隧道建设（中英文），2019，39（12）：2036-2042.

[2]　王鹏，楚文杰，陈磊，等. 大型地下洞室岩梁开挖主要工程地质问题及处理措施讨论[J]. 岩土工程学报，2019，41（11）：2165-2172.

[3]　刘会波，肖明，赵辰，等. 复杂地应力环境大型地下洞室围岩时效变形机制及力学模拟[J]. 岩石力学与工程学报，2013，32（S2）：3565-3574.

[4]　李典庆，蒋水华，周创兵. 基于非侵入式随机有限元法的地下洞室可靠度分析[J]. 岩土工程学报，2012，34（01）：123-129.

[5]　毛伟泽. 花岗岩力学性质变异性的细观机制研究[D]. 浙江大学，2020.

作者简介：

陈　涛（1977-），男，吉林辽源人，四川华能泸定水电有限公司，高级工程师，学士，从事水利水电工程方面工作；

刘　健（1991-），男，湖北武汉人，中国科学院武汉岩土力学研究所，博士，从事岩土工程工作；

闫生存（1975-），男，四川成都人，四川华能泸定水电有限公司，正高级工程师，博士，从事水利水电工程方面工作；

江　权（1978-），男，湖北武汉人，中国科学院武汉岩土力学研究所，研究员，博士，从事岩土工程工作；

袁超义（1981-），男，河南南阳人，四川华能泸定水电有限公司，高级工程师，硕士，从事水利水电工程管理工作.

（责任编辑：吴永红）