

# 三维界面裂缝应力强度因子的 杂交元计算方法研究

田文叶 黄松梅 简政

(西安交通大学, 陕西西安, 710049) (西安理工大学, 陕西西安, 710048)

**摘 要** 利用弹性力学放松连续性要求的变分原理, 建立了求解三维界面裂缝问题杂交元计算模型, 并通过采用杂交元法计算了三维界面裂缝应力强度因子, 为三维界面裂缝的实验研究提供了必要的理论依据。

**关键词** 变分原理 杂交元法 应力强度因子

在混凝土坝中, 由于坝体和基岩两者材料性质不同, 所以, 坝体与基岩界面是混凝土坝的一个薄弱环节。由于施工缺陷、温度变化及应力集中等原因, 有可能产生裂缝。应用断裂力学的方法, 对坝体和基岩界面裂缝进行断裂分析具有重要的理论及实践意义。而常规有限元计算裂缝问题, 很难真实地反映裂缝尖端的应力奇异性, 且要在裂缝尖端附近划分很细的有限元网格才能获得足够精度要求的结果, 计算工作量很大<sup>[1]</sup>。本文针对以上不足, 利用具有适合构造裂缝顶端单元特点的弹性力学放松连续性要求的变分原理, 建立了三维界面裂缝问题的杂交有限元计算模型, 计算了三维界面裂缝应力强度因子, 为三维界面裂缝的实验研究提供了必要的理论依据。

## 1 计算公式

如图1所示, 为双材料三维界面裂缝问题。设两种材料交接面与X轴重合, 界面两侧分属不同的材料区域。三维界面裂缝问题为I-II-III复合型裂缝。I-II型应力、位移表达式如下(本文仅取奇异项)

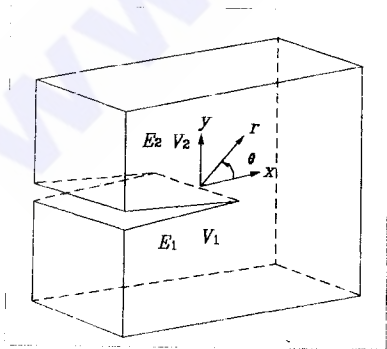


图1 三维界面裂缝

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= P_{11}\beta_1 + P_{12}\beta_2 \\ \sigma_y &= P_{21}\beta_1 + P_{22}\beta_2 \\ \sigma_{xy} &= P_{31}\beta_1 + P_{32}\beta_2 \\ U_x &= U_{11}\beta_1 + U_{12}\beta_2 \\ U_y &= U_{21}\beta_1 + U_{22}\beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

对于平面应变问题

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

式中  $P_{ij}, U_{ij}$  的表达式见文献<sup>[4]</sup>。

III型界面裂缝问题应力、位移表达式如下(本文仅取奇异项):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= -r^{-\frac{1}{2}}\beta_3 \sin(\theta/2)/2 \\ \tau_{\theta z} &= -r^{-\frac{1}{2}}\beta_3 \cos(\theta/2)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{\mu_1} r^{\frac{1}{2}} \sin(\theta/2) \beta_3 \\ \omega_2 &= -\frac{1}{\mu_2} r^{\frac{1}{2}} \sin(\theta/2) \beta_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

应力强度因子与  $\beta$  的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sqrt{2\pi}(1+R)(1/2\beta_1 - \beta_2\lambda_i) \\ K_{II} &= -\sqrt{2\pi}(1+R)(1/2\beta_2 + \beta_1\lambda_i) \\ K_{III} &= -\sqrt{\pi/2}\beta_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{式中 } R = \frac{\mu_1 + \mu_2 K_1}{\mu_2 + \mu_1 K_2}, \quad \lambda_i = \frac{1}{2\pi} \ln R$$

其中,  $\mu_1, \mu_2$  为剪切弹性模量;  $K_1, K_2$  为弹性常数。

## 2 杂交元模型的建立

如图2所示, 为一具有界面裂缝问题的弹性体, 为了更好地反映裂缝尖端的真实应力状态, 可以在裂缝尖端设置一个特殊单元, 用于考虑缝端应力的奇异性, 称为奇异元, 用  $V_s$  表示, 奇异元以外的区域

用  $V_0$ 。奇异元内部应力位移表达式取为公式(1)、(2)、(3)。奇异元外采用 20 节点六面体等参元计算, 奇异元周边邻接八个等参元, 这样, 奇异元周边共有 43 个节点。缝顶单元布置如图 3 所示。

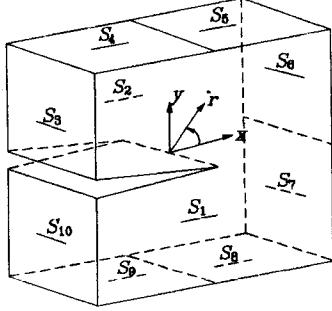


图 2 奇异单元

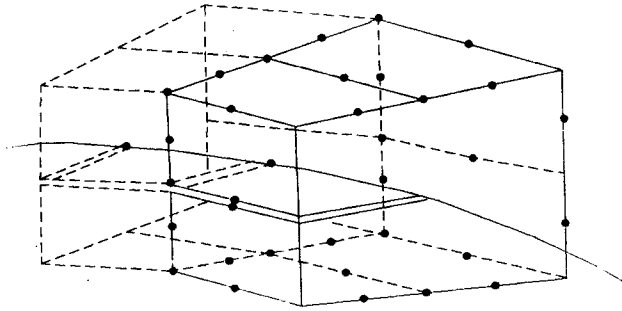


图 3 三维缝顶单元布置图

常规有限元单刚矩阵的形式可由最小势能变分原理建立, 很多文献均有阐述, 在此不再详述。对杂交元模型的建立而言, 关键在于建立特殊单元的单刚矩阵, 下面用最小势能原理第二扩展的泛函形式推导奇异元的单刚矩阵。最小势能原理第二扩展的泛函形式为:

$$\pi_p^* = \iiint_V [A(U_i) - \bar{f}_i U_i] dv - \iint_{S_0} \bar{T}_i U_i ds - \iint_{S_0} T_i(U_j)(U_i - \bar{U}_j) ds \quad (5)$$

对图 2 所示问题, 裂缝表面无荷载作用, 在  $V_0$  内无体力作用, 即在  $S_0$  上  $\bar{T}_i = 0$ , 在  $V_0$  内  $\bar{f}_i = 0$ 。将其代入公式(5), 得:

$$\pi_p^* = \iiint_V [A(U_i)] dv - \iint_{S_0} T_i(U_j) U_i ds + \iint_{S_0} T_i(U_j) \bar{U}_j ds \quad (6)$$

式中  $A(U_i) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ ,  $T_i(U_j) = \sigma_{ij} n_j$

根据虚功原理:

$$\iiint_V A(U_i) dv = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} \iint_{S_0} T_i(U_j) U_i ds \quad (7)$$

将公式(7)代入公式(6), 得:

$$\pi_p^* = -\frac{1}{2} \iint_{S_0} T_i(U_j) U_i ds + \iint_{S_0} T_i(U_j) \bar{U}_j ds \quad (8)$$

单元内部应力和位移用矩阵表示为:

$$U = M(r, \theta, z) \beta \quad (9)$$

$$\sigma = P(r, \theta, z) \beta \quad (10)$$

本文仅取奇异项,  $\beta$  取二次式, 则

$$T = n\sigma = R(r, \theta, z) \beta \quad (11)$$

式中  $R(r, \theta, z) = nP(r, \theta, z)$

$$[n] = \begin{bmatrix} V_x & 0 & 0 & V_y & 0 & V_z \\ 0 & V_y & 0 & V_x & V_z & 0 \\ 0 & 0 & V_z & 0 & V_y & V_x \end{bmatrix}$$

在选择边界给定位移时, 参照图 2, 将侧面  $S_1$ ,  $S_2$  与和常规单元相邻接的面  $S_3-S_{10}$  加以区分。

对于  $S_3-S_{10}$  面上的位移, 采用相应的等参元插值函数  $N$ , 根据与邻近单元的相容性, 得:

$$\bar{U} = N\{\xi, \eta\} q^j \quad (12)$$

对于侧面  $S_1, S_2$

$$\bar{U} = Lq^j \quad (13)$$

将(9)~(13)式代入(8)式, 得:

$$\pi_p^* = \beta^T Gq - \frac{1}{2} \beta^T H \beta \quad (14)$$

式中  $Gq = \sum_{j=1}^2 \int_{S_j} R^T L ds q^{(j)} + \sum_{j=3}^{10} \int_{S_j} R^T N ds q^{(j)}$

$$H = \sum_{j=1}^{10} \int_{S_j} \frac{1}{2} (R^T M + M^T R) ds$$

对(14)式施行变分后, 得:

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [G] \{q\} \quad (15)$$

将(15)式代回(14)式, 得:

$$\pi_p^* = -\frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (16)$$

$$\text{式中 } [K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (17)$$

此式即为奇异元单刚矩阵。

通过组装单元刚度矩阵, 就可得到包含两种不同性质单元的整体刚度矩阵  $K$ , 从而建立起杂交有限元方程式:

$$Kq = F \quad (18)$$

式中  $K$  为总刚度矩阵;  $q$  为节点位移向量;  $F$  为节点力向量。引入边界条件后就可求解式(18), 从而得到  $\{q\}$ , 将其代入(15)式得到系数矩阵  $\{\beta\}$ , 然后就可根据(4)式求出应力强度因子  $K_I, K_{II}$  和  $K_{III}$ 。

### 3 应力强度因子的计算和结果分析

本文采用图 4 所示的三维三点弯曲梁试件, 试件尺寸如图  $S \cdot W \cdot B = 40 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ , 初

始裂缝长度  $a$  取 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5 进行计算。弹性模量  $E_1$  取为 20 GPa, 泊松比取为 0.16, 应力强度因子计算结果如表 1 所示 (应力强度因子无量纲化  $K_1 = K'_1 BW^{3/2}/P$ )

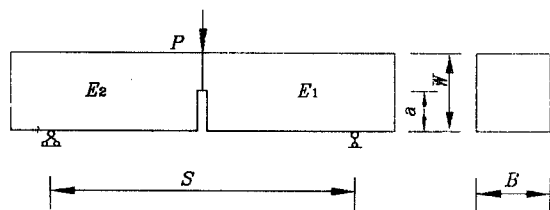


图 4 三点弯曲梁试件

杂交元法与边界配置法结果比较表 ( $E_1/E_2=1$ )

| $a/W$                            | 0.3   | 0.35  | 0.4   | 0.45  | 0.5   | 0.55  |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 杂交元法 $K$                         | 1.525 | 1.739 | 2.000 | 2.284 | 2.670 | 3.167 |
| 边界配置法 (文献 <sup>[3]</sup> ) $K^*$ | 1.523 | 1.733 | 1.981 | 2.280 | 2.660 | 3.150 |
| 误差 $ K - K^* /K^* \times 100\%$  | 0.13  | 0.35  | 0.96  | 0.00  | 0.00  | 0.50  |

从表中可以看出, 本文所提出的杂交元法与文献<sup>[3]</sup>所述边界配置法计算结果基本吻合, 误差最大

不超过 0.96%, 这说明用本文所提出的杂交元法来计算三维界面裂缝应力强度因子是完全可靠的, 且由于该方法利用了弹性力学放松连续性的要求, 较传统方法更适合构造裂缝顶端单元, 故计算结果更加合理。

#### 参考文献

- 1 陈传森. 有限元方法及其提高精度的分析. 湖南科学技术出版社, 1982
- 2 Rice. J. R. Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Crack. ASME Journal of Applied Mechanics. Vol. 55, pp98-103, 1988
- 3 王 铎. 断裂力学. 广西人民出版社, 1982
- 4 田文叶. 双材料三维界面裂缝应力强度因子的计算. 西安理工大学硕士论文, 1997

#### 作者简介

田文叶 女 西安交通大学 博士研究生 硕士  
黄松梅 男 西安理工大学水利系 教授  
简 政 男 西安理工大学水利系 副教授 硕士

(收稿日期: 1997-07-18)

## Study on Hybrid Finite Element Method for Stress intensity Factor of Three Dimensional Interface Crack

Tian Winye

(Xian Jiaotong University, Xian, 710049)

Huang Shongmei Jian Zheng

(Xian University of Technology, Xian, 710048)

**Abstract** The hybrid finite element model for solving the problem about 3-D interface crack is sets up based on variation principle for relaxing condition of continuity in mechanics of elasticity Furthermore, the stress intensity factor of 3-D interface crack is calculated using hybrid finite element method. The results are necessary theory basis for experiment and study of 3-D interface crack.

**Key Words** variation principle, hybrid finite element method, stress intensity factor

(上接第 3 页)

目前, 全国电力企业资产负债比的总体水平在 55% 左右, 我局资产负债率为 59%, 仍有一定吸纳债务的空间。因此, 我们要在争取国家开发银行支持的同时, 主动把握商业银行转换机制的有利时机, 推进电力产业资本与金融资本的有机结合, 以加快四

川电力工业发展的步伐

#### 作者简介

马怀新 男 四川省电力工业局 副局长 四川省水力发电工程学会 理事长 教授级高级工程师

(收稿日期: 1997-10-22)

## General Situation and Prospect of Sichuan Electric Power Industry Development

Ma Huaixin

(Sichuan Electric Power Industry Bureau, Chengdu, 610061)

**Abstract** Recently, Somebody in Sichuan believes that electric shortage will not be presented in Sichuan after generation of the Ertan Hydropower Project in 1998. In fact, the idea has adverse effect on hydropower development in Sichuan. Electric power development in 1996 in Sichuan is reviewed and the problems existed in the Sichuan electric network are analyzed. It is pointed out that energetical development of hydropower is the way to solve the problem of electric shortage in Sichuan. The future prospect for Sichuan electric power industry is provided.

**Key Words** Sichuan Province, electric power industry, general situation of development, prospect