

子结构的实施技巧及应用推广

刘晓青 李同春

(河海大学, 南京, 210024)

摘要 将一种输入数据简便的子结构的有效数值方法, 推广应用于含软弱夹层、带初间隙的摩擦接触问题, 并由此提出了相应的求解策略。

关键词 子结构 数值方法 软弱夹层 带初间隙的摩擦接触

1 前言

子结构法是将一个大型的结构分割成若干个规模较小的结构(即子结构), 各子结构之间通过公共边界相连接。将每个子结构的刚度特性聚缩至公共边界点, 然后拼装形成全结构平衡方程, 解出公共边界点位移, 再回代求出各子结构内部节点位移, 继而求出应力分布。它为在中小型计算机上对大型复杂结构进行分析提供了有效途径, 同时为已知域局部非线性问题提供了一种高效的计算方法, 因而得到非常普遍的应用。

但常用的子结构法中需输入较多的信息来处理子结构与整体结构间的协调关系, 因而给编制通用程序带来了不便。本文提出了一种有效的数值方法来解决这一问题。

摩擦接触问题的合理求解是工程界普遍关心的, 国内外对此均有不少研究, 本文给出了这类问题子结构法的有效求解途径。

2 子结构法的实施技巧

2.1 子结构法的分析过程

子结构法的求解步骤如下:

1、划分子结构。图1(a)的大型结构划分成若干个如图1(b)的子结构。对每个子结构

划分若干个单元, 确定边界点和内部节点。

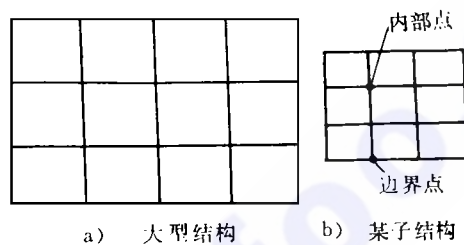


图1

2、子结构的聚缩。对每个子结构可建立平衡方程如下:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\{\delta_c\}$, $\{P_c\}$ 分别为边界节点位移和荷载; $\{\delta_i\}$, $\{P_i\}$ 分别为内部节点位移和荷载。

经变换, 式(1)为: $[\tilde{K}_{cc}] \{\delta_c\} = \{\tilde{P}_c\}$ (2-1)

$$\begin{aligned} \text{其中: } [\tilde{K}_{cc}] &= [K_{cc}] \\ &- [K_{ci}] [K_{ii}]^{-1} [K_{ic}]^T \quad (2-2) \\ \{\tilde{P}_c\} &= \{P_c\} - [K_{ci}] [K_{ii}]^{-1} \{P_i\} \quad (2-3) \end{aligned}$$

称 $[\tilde{K}_{cc}]$ 和 $\{\tilde{P}_c\}$ 分别为出口刚度矩阵和出口节点荷载列阵。可由方程(1)通过高斯消去法直接获得。

3、总体刚度矩阵及荷载列阵的建立。将每个子结构看成是一超级单元, 即可按一般有限元法处理形成整体平衡方程:

$$[K]\{\delta\}=\{P\} \quad (3)$$

式中 $\{\delta\}$ 是全结构所有公共边界节点位移列阵;

$[K], \{P\}$ 是全结构所有公共边界节点经聚缩而组装起来的刚度矩阵及荷载列阵。

4、由(3)式解得 $\{\delta\}$ 。

5、对每个子结构从 $\{\delta\}$ 中取得相应的 $\{\delta_e\}$, 代入(1)式中求解 $\{\delta_e\}$ 。

6、求每个子结构所含单元应力。

2.2 子结构法的有效实施方案

从子结构法的分析过程来看,子结构法的实施关键在于原始数据的准备、方便、有效地形成子结构级的各种原始参数数组,即单元信息、节点信息、出口信息等。常用的处理方法有两种^[1]。

1、对每个子结构单独进行单元、节点编号,在需要时单独输入。这种方法使数据准备工作比较杂乱和重复,不够理想。

2、按一般有限元完全一样地准备原始数据,再准备如下几个对照表:

a. 单元编号对照表,记录本子结构各单元对应于原总结构的单元编号;

b. 节点编号对照表,记录本子结构各节点对应于原总结构的节点编号;

c. 节点编号逆对照表,记录原总结构的各节点对应各子结构的节点编号;

d. 出口节点编号对照表,记录各子结构出口节点在所有公共边界点中的排序。

此外,还要输入原总结构出口节点总数,各子结构出口节点数等。然后,调用子程序形成各子结构的子结构级所需原始参数。

方法2与方法1相比,数据准备有条理,但需要准备的数据工作量仍较大。这里提出一种数据输入量小,程序编制简单的实施方案。

基本思路:不单独建立子结构级的单元信息、节点信息,而在子结构级独立形成出口信息及自由度指示矩阵。当在子结构级完成刚度矩阵,荷载列阵的组装、凝聚后,按照子

结构级的出口信息组装整体刚度矩阵,求解所有出口节点位移,再根据子结构节点自由度指示矩阵与所有出口节点形成的整体节点自由度指示矩阵间的对应关系传递位移,求解包含子结构内部节点的位移,继而求解所有单元应力。具体的实施过程如下:

1. 输入数据的准备。

a. 节点信息。对所有子结构循环,按照先编内部节点,再编出口节点的原则进行节点累计编号,形成整体节点编号。节点信息按通常的有限元法准备 COR 、 IB 数组。

$COR(IDM, NP)$ —— 节点坐标;

$IB(IDM, NP)$ —— 节点约束信息。

其中 IDM 表示维数, NP 表示节点总数。 $IB(ij) = 0$ 表示 j 节点 I 方向受约束, $IB(ij) = 1$ 表示 j 节点 I 方向为自由。

此外,附加一出口节点指示数组 $IEI(NP)$, $IEI(i) = 0$ 表示 i 节点为内部节点, $IEI(i) = 1$ 表示 i 节点为出口节点。

b. 单元信息。按所有子结构循环进行单元累计编号,按通常的方法形成单元信息。依此可建立 IEN 、 IEC 数组。

$IEN(NOD, NE)$ —— 单元信息;

$IEC(ISS)$ —— 每个子结构截止单元数。

其中 NOD 表单元节点数, NE 表单元总数, ISS 表子结构数。

2. 自由度指示矩阵的建立。

a. 子结构级自由度指示矩阵 $IPS(IDM, NP, ISS)$

设对第 i 个子结构,对其内部所包含单元 IE 循环, $IEC(i-1) < IE \leq IEC(i)$, 若 j 节点属于 IE 单元, j 节点 k 方向满足 $IB(k, j) = 1$, 则 $IPS(k, j, i) = 1$, 否则 $IPS(k, j, i) = 0$ 。所含单元循环完毕后,再对 IPS 数组累加,即可形成该级子结构自由度指示矩阵。

b. 整体自由度指示矩阵 $IP(IDM, NP)$ 。对所有节点循环,若 $IEI(j) = 1$, 且 $IB(k, j) = 1$, 则 $IP(k, j) = 1$, 否则 $IP(k, j)$

= 0。所有节点循环完毕后再累加,即形成含所有出口节点的整体自由度指示矩阵 $IP(IDM, NP)$ 。

3. 子结构出口信息的建立。

子结构出口信息包括:子结构出口节点总数 $N_1(ISS)$, 与之对应的节点编号 $N_2(N_1, ISS)$, 出口自由度数 $N_3(ISS)$ 。

首先对 N_1, N_2, N_3 充零, 然后对子结构循环。在 i 子结构中, 对所有节点循环, 若 j 节点满足 $IEI(j) = 1$, 且 $IPS(k, j, i)$ 中对应于任一 $k(0 < k < IDM)$ 不等于零, 则 $N_1(i)$ 累加 1, N_2 中记录相应节点号; 当 $IEI(j) = 1$, 对 k 循环, 若 $IPS(k, j, i) \neq 0$, 则 N_3 累加 1。

程序中该部分数组建立可与 IPS 数组同时完成。

4. 总体刚度矩阵的建立及出口节点位移求解。上述信息建立后可按通常方法形成子结构级的刚度矩阵, 荷载列阵, 并根据出口自由度数进行凝聚, 按子结构次序将被凝聚部分刚度矩阵, 荷载列阵存入外存。凝聚后的刚度矩阵、荷载列阵按超单元形式根据出口信息迭加到整体刚度矩阵中, 继而可求出出口节点位移。

5. 总体位移及总体应力求解。按子结构循环从外存调出被凝聚掉的刚度矩阵和荷载列阵, 根据 IPS 与 IP 的对应关系, 调出出口位移作为已知值充入荷载列阵中, 再进行四代求解各子结构内部节点位移, 继之求解单元应力。

3 子结构法的推广应用

3.1 局部非线性问题

对含夹层类的局部区域非线性问题, 子结构法的优越性在于保证迭代只在该非线性区域内进行, 而弹性区域内的刚度矩阵、荷载列阵保持不变, 使得问题求解简单化。这类问题程序处理亦非常简单, 只需将局部非线性区域内的所有节点均作为出口节点处理即

可。在迭加整体刚度矩阵时, 除将弹性域内的子结构作为超单元处理外, 再加上局部非线性域内的所有单元刚度矩阵。

3.2 摩擦接触问题

摩擦接触问题的基本原理详见文献[2], 由于接触状态事先未知, 须经迭代才能确定, 因此一般的处理方法均是在接触边界两边编双节点。由此而带来的问题是在接触点对间在保持位移连续的方向要附加位移连续的约束方程, 给求解带来一定的困难。目前对该问题的处理有罚有限元法, 约束内力作为未知量的求解方法等。这些方法一方面增加了方程阶数, 程序编制也较复杂。这里提出一种简便的子结构求解方法。假定接触体为弹性体, 求解策略简述如下:

1. 假定所有出口节点均为接触边界上的节点, 与前述子结构法准备的数据相同, 再附加接触点对信息, 它包括接触点对间的节点号、初始接触状态。

2. 接触体内节点的自由度方向按整体坐标系建立, 接触边界上节点自由度方向与接触边界的法向、切向相一致, 即采用局部坐标系建立。此时包含接触点在内的单元刚度矩阵形成按文献[3]公式处理。

3. 所有出口节点组成的整体自由度指示矩阵 $IP(IDM, NP)$ 按下述方法形成。

对所有节点循环, 若 $IEI(j) = 1$, 且 $IB(k, j) = 1$, 则 $IP(k, j) = 1$, 否则 $IP(k, j) = 0$ 。然后对所有接触点对循环。若第 i 接触点对由 j 和 k 组成, 当该接触点对处于连续状态时, 将 $IP(l, k)(l = 1 \sim IDM)$ 充成零; 当处于滑移状态时, 将 $IP(l, k)(l = 1 \sim 2)$ 充成零, 否则不作任何调整。然后对 IP 数组中非零元素累加。累加完毕后再对接触点对循环。当 i 接触点对处于连续状态时, 令 $IP(l, k) = IP(l, j)(l = 1 \sim IDM)$; 当处于滑移状态时, 令 $IP(l, k) = IP(l, j)(l = 1 \sim 2)$, 其余不变。由此建立了整体方程阶数最少的自由度指示矩阵。

4、其余与前述子结构法求解步骤基本相同,但需对接触状态进行迭代,直至收敛,再回代求解非出口节点位移及计算单元应力。接触单元的约束内力可由式(2-1)直接解出。事实上,式(1)中的 $\{P_c\}$ 可看成由两部分组成。

$$\{P_c\} = \{P_{c1}\} + \{P_{c2}\} \quad (3)$$

其中 $\{P_{c1}\}$ 为外部作用荷载, $\{P_{c2}\}$ 为接触面上的约束反力。由于凝聚后的式(2-1)中 $\{P_c\}$ 与 $\{P_c\}$ 有关部分不变,因此接触面反力可直接解出,即:

$$\{P_{c2}\} = [\tilde{K}_{cc}]\{\delta_c\} - \{P_{c1}\} \quad (4)$$

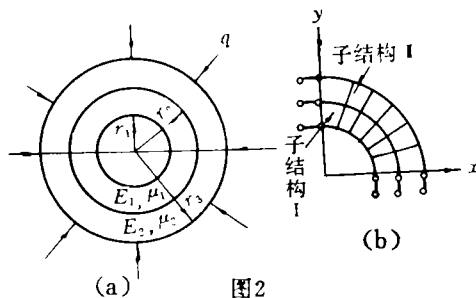
3 算 例

例1:图2(a)为两圆环套, $r_1 = 1\text{m}$, $r_2 = 2\text{m}$, $r_3 = 3\text{m}$, 外周边受有 $q = 0.1\text{MPa}$ 的均布压力, $E_1 = 20\text{GPa}$, $\mu_1 = 0.3$, $E_2 = 15\text{GPa}$, $\mu_2 = 0.2$, 按平面应力问题计算。

由于对称性,取结构的1/4求解即可。将其分为两个子结构,网格剖分见图2(b)。剖分后总节点数为42, I、II两子结构分别包含21个节点,出口节点为7个,总单元数为24,子结构 I 截止单元数为12,子结构 II 为12。求得 $y=0$ 上的水平位移见表1。

表1 $y=0$ 截面的水平位移($\times 10^{-5}/\text{m}$)

X/m	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
本文解	1.223	1.185	1.275	1.522	1.780
精确解	1.225	1.197	1.286	1.532	1.788



例2:图3(a)所示固接在岩基上基础梁计算图式,按平面应变问题求接触面上的应力。取结构的一半计算,单元网格剖分见图3(b),分为两个子结构,总节点数为382,总单元数为336。子结构 I 含节点21个,出口节点数为7,含单元12个。子结构 II 含节点361个,出口节点数亦为7,含单元284个。接触点对数为7。接触点对初始接触状态均假定为连续状态,对应的求解方程数为13。对不同的抗拉强度,按 Mohr—Columb 准则考虑屈服与否,求得基础梁反力见表2。

对该例,文献[4]用夹层单元按弹塑性问题进行过研究,文献[5]用双向链杆法亦进行

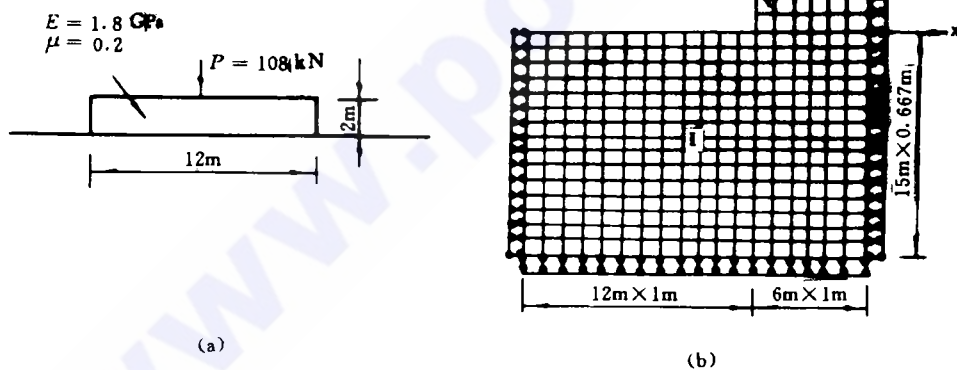


图3

注:地基 $E_0 = 1\text{GPa}$, $\mu_0 = 0.3$; 接触面 $c = 2\text{kPa}$, $f = 0.2$, $f_c = 0, 1, 2, \text{kPa}$ 。

过计算,为比较起见,将其结果列于表3。

从本文成果来看,接触面的抗拉强度、摩

比较表2与表3,可见本文的结果是合理的,由此证明了本文方法的正确性。

擦效应的考虑对地基梁的反力分布及其数值大小均有一定影响,但并不十分显著。

表2 基础梁反力及接触状态

反力单位:kPa

x(m)		0.0	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0	-5.0	-6.0
弹性解 (反力)	垂直	-27.16	-21.44	-11.14	-4.73	-2.31	-0.94	0.27
	水平	0.00	-7.24	-8.24	-4.89	-2.84	-1.69	-2.47
弹塑性解 ($f_t=0.0$)	接触状态	1	3	3	3	3	2	2
	垂直反力	-28.22	-22.39	-11.88	-4.90	-0.72	0.00	0.00
	水平反力	0.0	-6.48	-4.38	-2.98	-2.14	0.00	0.00
弹塑性解 ($f_t=1.0$ kPa)	接触状态	1	3	3	3	3	3	2
	垂直反力	-27.90	-22.06	-11.57	-4.93	-2.02	0.54	0.00
	水平反力	0.00	-6.41	-4.31	-2.99	-2.4	-1.89	0.00
弹塑性解 ($f_t=2.0$ kPa)	接触状态	1	3	3	3	3	3	3
	垂直反力	-27.77	-21.92	-11.39	-4.77	-2.15	-0.58	1.41
	水平反力	0.00	-6.38	-4.28	-2.95	-2.43	-2.12	-1.72

注:接触状态1指连续,2指张开,3指滑移。

表3 基础梁反力比较

单位:kPa

x 坐标		0.0	-0.75	-1.0	-2.0	-2.25	-3.0	-3.75	-4.0	-5.0	-5.25	-6.0
垂	弹性(本文)	-27.16	—	-21.44	-11.44	—	-4.73	—	-2.31	-0.94	—	0.27
	弹塑性(本文) ($f_t=2.0$ kPa)	-27.77	—	-21.92	-11.39	—	-4.77	—	-2.15	-0.58	—	1.41
	刘氏解[5]	—	—	-22.6	—	—	-3.24	—	—	-1.17	—	—
直	弹性[4]	—	-23.6	—	—	-9.52	—	-2.78	—	—	0.15	—
	弹塑性[4]	—	-23.1	—	—	-10.0	—	-3.0	—	—	0.07	—
	刘氏解[5]	—	—	-22.6	—	—	-3.24	—	—	-1.17	—	—
水	弹性(本文)	0.0	—	-7.24	-8.24	—	-4.89	—	-2.84	-1.69	—	-2.47
	弹塑性(本文) ($f_t=2.0$ kPa)	0.0	—	-6.38	-4.28	—	-2.95	—	-2.43	-2.12	—	-1.72
	刘氏解[5]	—	—	-6.38	-4.28	—	-2.95	—	-2.43	-2.12	—	-1.72
平	弹性[4]	—	-4.73	—	—	-7.07	—	-3.13	—	—	—	—
	弹塑性[4]	—	-5.35	—	—	-4.5	—	-2.53	—	—	—	—
	刘氏解[5]	—	—	—	—	-4.48	—	—	—	-2.48	—	—

参 考 文 献

5 结 束 语

本文提出的子结构法的有效数值方案为解决复杂结构的应力分析提供了一种简单的途径。通过基础梁与地基相互作用下的接触应力求解算例可看出,子结构法可非常有效地用来解决弹性体与弹性体之间的摩擦接触问题。

- 1 姜晋庆、张锋编著. 结构弹塑性有限元分析法. 宇航出版社, 1990. 3
- 2 崔俊芝. 关于有间隙的弹性接触问题. 力学学报, 1980 (2): p16-21
- 3 欧阳晓宁、卓家寿. 变分不等式解弹塑性接触问题. 河海大学学报, No. 1, vol 17, 1989
- 4 带有夹层岩基的三维弹塑性分析. 华东水利学院学报, No. 1, 1978
- 5 潘家铮. 弹性地基上的梁和框架.

(收稿日期:19940530)