

多功能三维渗流 计算程序——STSA1的研究*

许国安 魏泽光 TV139.14

(水利水电科学研究院)

提 要 本文介绍了 STSA1 三维渗流分析程序的特点和主要功能,以及对有关问题的处理方法、程序的前处理和后处理,最后介绍了程序的框图和工程算例。

关键词 三维渗流 计算程序 FORTRAN 语言 有限元计算

一、程序的结构特点

程序结构采用模块化、积木式,使程序便于修改、扩充和发展。本程序以子程序块为程序基本单位,每个子程序都有其简单明确的独立功能,子程序块之间的信息传递是通过形式参数和公共数组来实现。因此,这样的程序结构十分灵活,便于程序修改、扩充和发展,它为今后发展新程序提供良好的基础。

二、程序的单元类型

水电工程渗流边界条件极为复杂,为了能较好地适应边界条件,程序采用多种类型的等参数单元,每种类型的单元都设有一次插值单元(适用于渗流变化较平缓的区域),二次插值单元(适用于渗流变化急剧的区域和介于两者之间的过渡单元(适用于介于前两种渗流变化之间的过渡区域)。因此能较好地适应渗流问题的复杂边界,提高求解精度,并使信息填写直观方便。

(一)二维三角形单元见图 1

1. 3个节点的三角形等参数单元的形函数公式

$$\left. \begin{aligned} N_1^* &= (1-\xi)/2 \\ N_2^* &= (\xi-\eta)/2 \\ N_3^* &= (1+\eta)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

2. 4~6个节点的三角形等参数单元的统一形式的形函数公式

$$\left. \begin{aligned} N_4 &= a_4(\xi-\eta)(1-\xi) \\ N_5 &= a_5(\xi-\eta)(1+\eta) \\ N_6 &= a_6(1-\xi)(1+\eta) \\ N_1 &= N_1^* - (N_4 + N_6)/2 \\ N_2 &= N_2^* - (N_4 + N_5)/2 \\ N_3 &= N_3^* - (N_5 + N_6)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

* 本文为“七五”国家技术攻关项目,合同编号 17-1-2-2(6)

其中 $a_i = \begin{cases} 1 & \text{当边中间有节点时;} \\ 0 & \text{当边中间无节点时;} \end{cases} i=4,5,6$

N_i^* 为公式(2-1)的形函数。

(二)二维的四边形单元见图 2

1. 4 个节点的四边形等参数单元的形函数公式

$$N_i^* = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) / 4 \quad i=1,2,3,4 \quad (2-3)$$

2. 5~8 个节点的四边形等参数单元的统一形式的形函数公式

$$N_1 = N_1^* - (N_5 + N_8) / 2$$

$$N_2 = N_2^* - (N_5 + N_6) / 2$$

$$N_3 = N_3^* - (N_6 + N_7) / 2$$

$$N_4 = N_4^* - (N_7 + N_8) / 2$$

$$N_5 = a_5(1 - \xi^2)(1 - \eta) / 2$$

$$N_6 = a_6(1 + \xi)(1 - \eta^2) / 2$$

$$N_7 = a_7(1 - \xi^2)(1 + \eta) / 2$$

$$N_8 = a_8(1 - \xi)(1 - \eta^2) / 2$$

(2-4)

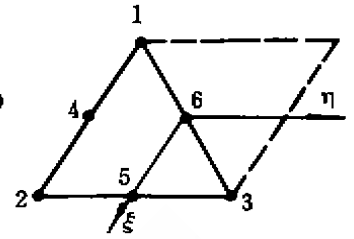


图 1 三角形单元

其中 $a_i = \begin{cases} 1 & \text{当边中间有节点时;} \\ 0 & \text{当边中间无节点时;} \end{cases} i=5,6,7,8$

$N_{s,i}$ 为公式(2-3)的形函数。

(三)三维的六面体单元见图 3

1. 8 个节点的六面体等参数单元的形函数公式

$$N_i^* = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) / 8 \quad i=1,2,\dots,8 \quad (2-5)$$

2. 9~20 个节点的六面体等参数单元的统一形式的形函数公式

$$N_1 = N_1^* - (N_9 + N_{12} + N_{13}) / 2$$

$$N_2 = N_2^* - (N_9 + N_{10} + N_{14}) / 2$$

$$N_3 = N_3^* - (N_{11} + N_{10} + N_{15}) / 2$$

$$N_4 = N_4^* - (N_{11} + N_{12} + N_{16}) / 2$$

$$N_5 = N_5^* - (N_{13} + N_{17} + N_{20}) / 2$$

$$N_6 = N_6^* - (N_{14} + N_{17} + N_{18}) / 2$$

$$N_7 = N_7^* - (N_{15} + N_{18} + N_{19}) / 2$$

$$N_8 = N_8^* - (N_{16} + N_{19} + N_{20}) / 2$$

(2-6)

$$N_9 = a_9(1 - \xi^2)(1 + \eta, \eta)(1 + \zeta, \zeta) / 4 \quad i=9,11,17,19$$

$$N_{10} = a_{10}(1 + \xi, \xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta, \zeta) / 4 \quad i=10,12,18,20$$

$$N_{15} = a_{15}(1 + \xi, \xi)(1 + \eta, \eta)(1 - \zeta^2) / 4 \quad i=15,16,13,14$$

其中 $a_i = \begin{cases} 1 & \text{当棱中间有节点时;} \\ 0 & \text{当棱中间无节点时;} \end{cases} i=9,10,\dots,20$

N_i^* 为公式(2-5)的形函数。

(四)三维的三棱柱等参数单元

程序设有 6 个节点和 7~15 个节点的三棱柱等参数单元(公式略见[4])

(五)二维导水薄断层单元见图 4,

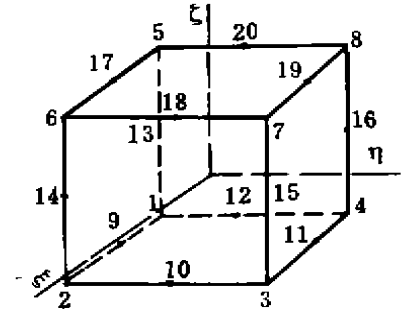


图 3 六面体单元

在求解复杂岩基的渗流问题中的导水薄断层,由于其厚度很小,采用加密网络的方法,将增加计算量,而且易出现单元形态奇异。

1. 2个节点的导水断层单元的形函数公式

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)/2 \\ N_2 &= (1+\xi)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

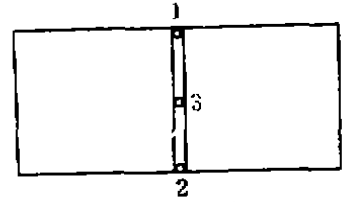


图4 二维导水薄断层单元

2. 3个节点的导水断层单元的形函数公式

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -(1-\xi)\xi/2 \\ N_2 &= (1+\xi)\xi/2 \\ N_3 &= (1+\xi)(1-\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

(六) 三维的导水薄断层单元见图5

1. 4个节点的导水断层单元的形函数公式同公式(2-3)。

2. 5~8个节点的导水断层单元的形函数公式同公式(2-4)。

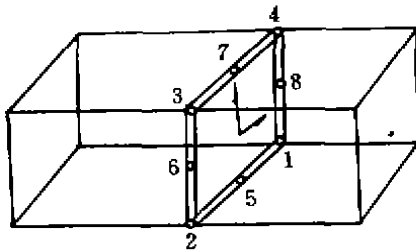


图5 三维导水薄断层单元

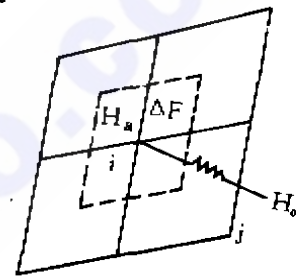


图6 排水井列的杆单元

(七) 排水井列的杆单元图6

坝基渗流控制中往往采用的排水措施是排水井的数量多,而井径和井间距又很小,无法用加密网格或杂交元的办法来模拟。本程序采用与井列断面上相应网络节点相连的杆单元来模拟,其长度等于排水井绕流附加渗径长度 ΔL_w 。该杆单元一端的水头为井水位 H_w ,而另一端则为待求的井列断面平均测压管水位 H_a 。

$$\Delta L_w = a \ln(a/2\pi r_w) / 2\pi \quad (2-9)$$

式中 a 为井间距; r_w 为井的半径。

三、程序的主要功能及对有关问题的处理方法

(一) 服从达西定律的稳定渗流见图7

本程序能求解符合达西定律的非均质、各向异性(渗透系数主方向与坐标轴方向一致)的承压和非承压的稳定渗流问题。三维问题的基本方程和边界条件:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (3-1)$$

$$H(x, y, z) |_{S_1} = f(x, y, z) \quad \text{在 } S_1 \text{ 上} \quad (3-2)$$

$$H(x, y, z) |_{S_3+S_4} = z(x, y) \quad \text{在 } S_3 \text{ 和 } S_4 \text{ 上} \quad (3-3)$$

$$K_x \frac{\partial H}{\partial x} \text{con}(n, x) + K_y \frac{\partial H}{\partial y} \text{con}(n, y) + K_z \frac{\partial H}{\partial z} \text{con}(n, z) = q = 0 \quad (3-4)$$

式中 H 为水头函数; K_x, K_y, K_z 分别为 x, y, z 主方向渗透系数; Ω 为渗流区域; S_1 为已知水

头值的边界曲面, S_2 为给定流量边界曲面, S_3 为浸润面, S_4 为逸出面, q 为边界上的单宽流量 (这里 $q=0$ 表示为不透水边界), n 为边界的外法线方向。对各向同性的介质即 $K_x = K_y = K_z$, 公式(3-4)可简化为 $\partial H / \partial n = 0$ 。对于所研究的稳定渗流场, 根据变分原理, 上述定解问题的求解等价于求下列泛函的极值问题, 即

$$\begin{aligned} I[H(x, y, z)] &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [K_x (\partial H / \partial x)^2 + K_y (\partial H / \partial y)^2 + K_z (\partial H / \partial z)^2] dx dy dz \\ &= \min H(x, y, z) |_{S_1} = f(x, y, z) \end{aligned} \quad (3-5)$$

(二) 非线性的稳定渗流

本程序可以求解不符合达西定律的非线性各向同性稳定渗流问题。其基本方程和边界条件以及它等价泛函极值问题的形式同服从达西定律渗流问题一样, 但 k 不再是常数, 而是渗流速度的函数即 $k = k(V)$ 。目前非线性渗透规律主要有两种形式:

1. 指数形式(米斯巴克)

$$\begin{aligned} J &= cV^m \\ K &= C^{-\frac{1}{m}} (H_x^2 + H_y^2)^{\frac{1-m}{m}} \end{aligned} \quad (3-6)$$

式中 $H_x = \partial H / \partial x$, $H_y = \partial H / \partial y$, c, m 为渗透参数, 由试验确定, 它与介质和流体性质有关。

2. 二项式形式(福希海默)

$$\begin{aligned} J &= aV + bV^2 \\ k &= -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|H_s|}{b}} \end{aligned} \quad (3-7)$$

式中 $|H_s| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$, a, b 为渗透参数, 由试验确定, 它与介质和流体的性质有关。

由于 k 不仅与介质和流体的性质有关, 同时还是未知水头函数 $H(x, y, z)$ 偏导数的函数, 在求解之前是未知的, 因此, 代数方程组:

$$[K]\{H\} = \{F\} \quad (3-8)$$

是非线性的。为了求解各节点的水头值, 必须使代数方程组线性化, 先假定 k 值, 按达西渗流进行计算, 求解得到各节点的水头值, 作为初始值, 由公式(3-6)或(3-7)计算 k 值, 然后去求解更精确的各节点的水头值, 这个过程反复进行, 直至上一次计算值与本次计算值的差值满足精度要求为止。

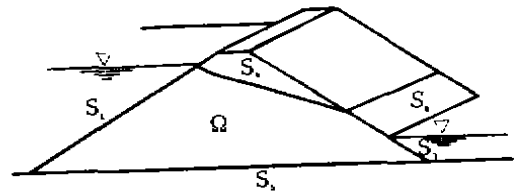


图7 渗流区域和边界

(三) 自由面和渗出点位置的确定

1. 自由面的确定 对于非承压渗流问题的自由面是渗流场特有的一个待定边界。自由面边界必须同时满足(3-3)和(3-4)式。由于它的几何位置事先不知道, 因此, 求解之前, 可先根据经验假定其初始位置, 然后进行试算, 反复调整, 直至渗流自由面上的所有节点都满足:

$$|Z_i^{(n)} - H_i^{(n)}| < \epsilon \quad \epsilon \text{ 为允许误差。}$$

渗流自由面的位置往往需要经过多次反复调整才能确定, 而渗流自由面位置的变化, 只在自由面的附近区域对渗流场产生较大影响, 而对于离自由面较远的区域则影响不大, 因此, 为了节省计算时间, 把所计算的渗流区分为迭代区和非迭代区。迭代区参加调整自由面的局部迭代, 直到误差满足容许误差范围, 然后再进行整个渗流区域的计算。程序采用整体迭代和局部

迭代交替进行,直至整体计算满足精度要求。为了避免在迭代过程中,由于调整自由面及附近节点的坐标值导致单元形态变坏,本程序在迭代过程中,除调整自由面及其附近节点的坐标值外,还可以对任意节点的坐标进行调整修改,使发生奇异的单元形态变好些。

2. 逸出点的确定 逸出点是渗流自由面上的特殊点,它位于渗流自由面和渗出段的交界处,它既是渗流自由面上未知水头节点,又是渗出段上作为已知水头节点。程序采用如下两种方法来确定。

(1)和渗流自由面上的节点一样,作为未知点,与自由面上的节点一起迭代来确定其位置,但是修改调整渗出点的位置应沿着渗出段进行。

(2)事先假定为已知水头节点,采用拟合曲线,用外插法来修定,即在自由面上取与渗出点邻近的3个以上的节点作拟合曲线,并与渗出段的直线相交,求出交点,与自由面同时进行迭代,直至满足精度要求,最后求出的交点为逸出点。

(四)渗流量和渗透比降的计算

1. 渗流量的计算 在求出渗流场各节点的水头值后,即可由程序直接计算通过某一截面的渗流量: $Q = \sum_{i=1}^m Q_i$

其中 m 为截面跨过的单元数, Q_i 为通过某一个单元截面的流量,对于等参数单元,由于雅可比行列式之值在单元表面为零,故计算流量采用中截面进行计算,对于二维问题,通过某一单元中截面的流量公式为:

$$Q_i = - \int_{\Gamma_i} [K_x(\partial H/\partial x)\text{con}(n,x) + K_y(\partial H/\partial y)\text{con}(n,y)] ds \quad (3-9)$$

对于三维问题,通过某一单元中截面的渗流量公式为:

$$Q_i = \iint_{\Gamma_i} [K_x(\partial H/\partial x)\text{con}(n,x) + K_y(\partial H/\partial y)\text{con}(n,y) + K_z(\partial H/\partial z)\text{con}(n,z)] ds \quad (3-10)$$

式中 n 为截面的外法线。

2. 渗透比降的计算 本程序采用内插法矩阵计算,这种方法直接求出单元节点上的水头函数在某方向的导数,作为该处此方向上的渗透比降值。因此可以比较准确地求出介质分界面上、下游出口处的渗透比降,而这些部位的渗透比降是实际工程中很感兴趣的。根据内插法矩阵的性质(见图8):

$$[G_1][G] [I] \quad (3-11)$$

其中 $[G_1] = \begin{bmatrix} N_1(b_1) & N_2(b_1) & \dots & N_{20}(b_1) \\ N_1(b_2) & N_2(b_2) & \dots & N_{20}(b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_1(b_{20}) & N_2(b_{20}) & \dots & N_{20}(b_{20}) \end{bmatrix}$

$$[G] = \begin{bmatrix} N_1(a_1) & N_2(a_1) & \dots & N_{20}(a_1) \\ N_1(a_2) & N_2(a_2) & \dots & N_{20}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_1(a_{20}) & N_2(a_{20}) & \dots & N_{20}(a_{20}) \end{bmatrix}$$

$[I]$ 为单位矩阵, $b_i = b_i(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, $a_i = a_i(\xi, \eta, \zeta)$

$$\bar{\xi}_i = \begin{cases} 1/\xi, & \text{当 } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{当 } \xi = 0 \end{cases} \quad \bar{\eta}_i = \begin{cases} 1/\eta, & \text{当 } \eta \neq 0 \\ 0 & \text{当 } \eta = 0 \end{cases} \quad \bar{\zeta}_i = \begin{cases} 1/\zeta, & \text{当 } \zeta \neq 0 \\ 0 & \text{当 } \zeta = 0 \end{cases}$$

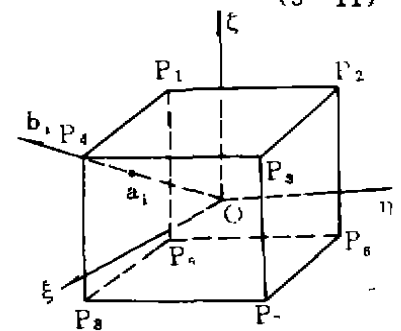


图8 内插法矩阵点 a_i 和 b_i 的关系

知, $[\delta H] = [G][\delta \bar{H}]$, 则有 $[G_1][\delta H] = [G_1][G][\delta \bar{H}]$, 故单元节点上的水头导数由下式得出:

$$[\delta \bar{H}] = [G_1][\delta H] \quad (3-12)$$

$$\text{其中 } [\delta \bar{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{p_1}}{\partial x} & \frac{\partial H_{p_1}}{\partial y} & \frac{\partial H_{p_1}}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{p_2}}{\partial x} & \frac{\partial H_{p_2}}{\partial y} & \frac{\partial H_{p_2}}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial H_{p_{20}}}{\partial x} & \frac{\partial H_{p_{20}}}{\partial y} & \frac{\partial H_{p_{20}}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [\delta H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H(a_1)}{\partial x} & \frac{\partial H(a_1)}{\partial y} & \frac{\partial H(a_1)}{\partial z} \\ \frac{\partial H(a_2)}{\partial x} & \frac{\partial H(a_2)}{\partial y} & \frac{\partial H(a_2)}{\partial z} \\ \frac{\partial H(a_{20})}{\partial x} & \frac{\partial H(a_{20})}{\partial y} & \frac{\partial H(a_{20})}{\partial z} \end{bmatrix}$$

则节点 P_i 的渗透比降为:

$$J_{p_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial H_{p_i}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_{p_i}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_{p_i}}{\partial z}\right)^2} \quad (3-13)$$

对于渗流急剧的区域, 我们把围绕 p_i 点的同一介质的相邻单元水头函数导数值取平均值作为 p_i 点在此介质区域的渗透比降。

四、程序的前处理和后处理

(一) 程序的前处理

进行有限元计算时, 主要工作量是输入数据的准备和填写, 而输入数据最多的是节点坐标和单元信息。对于岩土工程的渗流问题, 由于计算区域和边界条件极为复杂, 很难采用自动剖分方法来处理。本程序采用人机结合, 充分发挥人的灵活性和机器处理有规则数据能力强的特点, 即由人工进行单元的剖分和节点的编号。在剖分时, 应注意不使单元太畸形; 在进行节点编号时, 应使单元点号差(即带宽)最小, 并使信息填写方便。为简化数据的填写和输入, 在程序设计中采用“线信息”和单元分批分块两项措施。

“线信息”是把具有某种性质的节点号, 例如这些点在同一直线上, 且坐标值具有等比关系, 将这组节点号划分成若干条线, 每一条线称为一条“线信息”。因此, 所计算的渗流区的节点坐标信息只要填写和输入若干条“线信息”和少量转折处的关键点的坐标值, 其余所有节点坐标值均由程序自动生成。调整浸润面各条线的节点号和具有相同水头的已知水头节点号, 也可用“线信息”来填写。“线信息”的填写是利用节点号都大于零这个特点, 且利用负整数和零进行巧妙的组合, 使得填写“线信息”的工作量大为减少。

单元分批分块是利用具有相同材料, 相同类型的单元可组成一批单元, 用单元批信息填写, 如果同一批单元的节点号具有一定规则, 每一个单元为周期性变化, 可组成一组单元块, 该单元块的所有单元信息, 只要填写输入一个单元的信息即可, 因此, 单元信息的数据就大大地简化。

大量方案计算表明, 采用这些处理措施, 大大地减少了输入数据的工作量和错误机会。

程序还设置各种检查功能, 对输入数据进行严格的逻辑检查, 并准确地指出错误的类型和位置, 以便计算人员很快找出错误进行修改。

(二) 程序的后处理

本程序设有计算和输出任意剖面或平面的等水头线和等地下水位线的子程序, 成果可由

计算机画图,从而减少输出成果的整理工作量。

五、程序框图和工程实例

(一)程序框图见图9

(二)工程实例——二滩水电站

二滩水电站拱坝地基的三维渗流计算成果见图10。

二滩坝址区为二迭系玄武岩和正长岩,构造破坏微弱,无大的断裂构造,河谷覆盖层厚一般为20~28m,岩体的透水性受风化卸荷影响,其分布沿垂直向,有明显地随深度增加而减弱的规律,各岩层的渗透系数列于附表。

二滩拱坝上游帷幕设置、下游及地下厂房排水情况和消力塘排水系统见图10。两岸坝顶帷幕向岸里延伸100m,防渗帷幕伸入坝基相对不透水层,帷幕厚度为3~5m,设计要求帷幕的渗透系数为0.015m/d。拱坝坝肩抗力体部位为体排水,两岸各分成四区,每区在分层廊道中打辐射排水孔。

为了了解坝基渗流状况是否满足设计要求和各种渗流控制效果,进行三维渗流计算。我们把所研究的渗流区域共分22面,4799个单元,总共节点数为6138个,计算采用六面体和三棱柱等参数单元。

由图可以看出,穿过坝基的库水大部分被坝基的排水井截住,拱坝两岸坝肩大部分坝基处于非承压状态,即使出现承压,扬压力也不大;消力塘的排水非常重要,一旦失效,将引起渗流状态的恶化,应予以重视;为了确保厂房的安全,应加强山坡和厂房区的排水。

附表 二滩各岩层渗透系数

| 岩层编号 | 渗透系数(m/d) |
|------|-----------|
| I | 0.47 |
| II | 0.094 |
| III | 0.047 |
| IV | 0.015 |

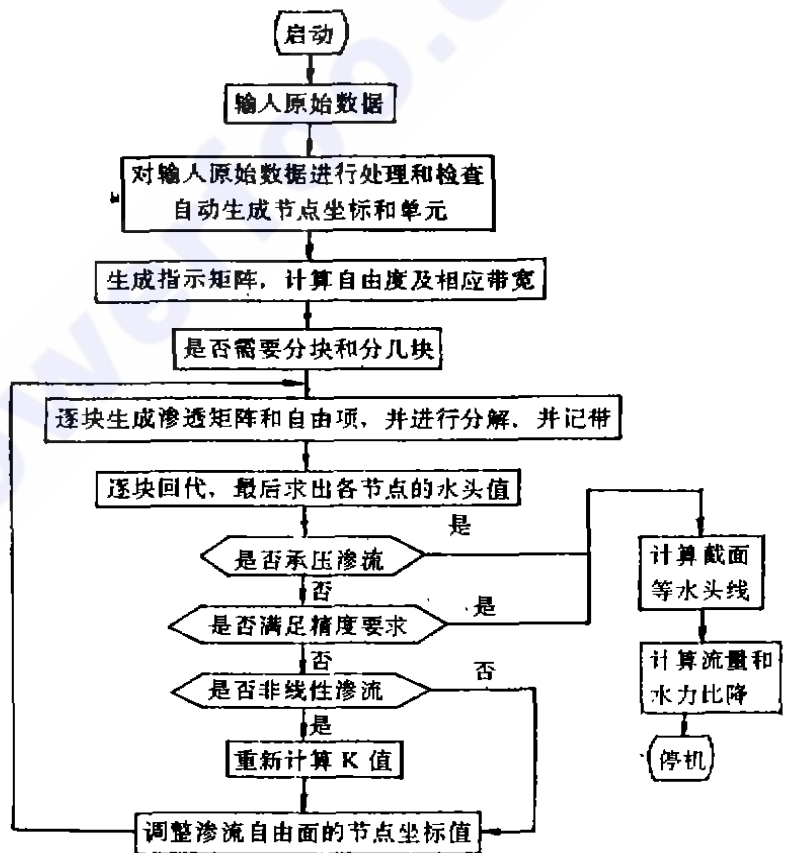


图9 程序框图

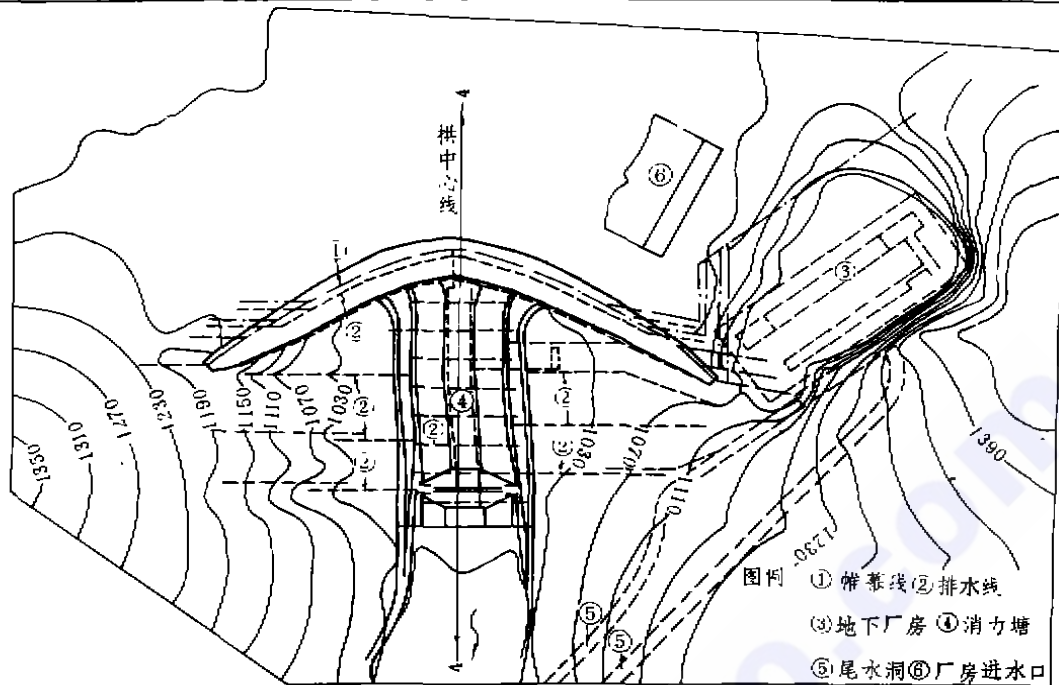


图10 二滩电站设计方案,等水头线

参 考 文 献

- 1 魏泽光、黄俊、许国安、李春华,三维稳定的有限元计算,水利学报1982年第1期
- 2 杜延龄、许国安、黄一和,复杂岩基的三维渗流的分析研究,水利学报1984年第3期
- 3 许国安,内插法矩阵在有限元渗流计算中的应用,水利水电科学研究院科学研究论文集第20集1985年2月
- 4 曹志浩,三维等参有限元中若干计算问题,复旦学报,1978年第3期

Study on Multipurpose 3-D Seepage Computation Program — STSA1

Xu Guoan Wei Zeguang

(Water Conservancy and Hydroelectric Scientific Research Institute)

Abstract The paper presents the characteristics and main functions of STSA1 3-D seepage analysis program, processing method for concerned problems, preprocessing and post processing of the program. Finally, the program chart and engineering computation are introduced.

Key Words 3-D seepage, computation program, FORTRAN language, finite element computation.