# 稳态概率的分析及其应用

张 光 科

（成都科技大学）

## 一、前　　言

在水资源系统随机动态规划方法中，不仅转移概率的推求甚为重要，而且稳态概率的分析也是必不可少的。只有在求出稳态概率的基础上才有可能进行优化策略的可靠性分析以及各用户供水保证率分析、年期望弃水量分析。在国内外近来的有关文献中，求解稳态概率是解线性方程组。但当未知数较多时，线性方程组求解相当困难，甚至用大型计算机也难以完成。本文通过对稳态概率的剖析。提出用迭代法来完成稳态概率的分析计算，以克服解大型线性方程组的困难。同时对它的应用作出详细的分析讨论。

## 二、稳态概率的分析

### 1.稳定概率的提出

用简单马尔柯夫过程描述径流，将 $t$ 时段内的随机入流处理为可能的离散值，用指标 $i$ 表示离散值的个数（$i=1, 2, \cdots N$）。用$Q_{it}$ 表示 $t$ 时段内的随机入流，$PQ_{it}$ 表示发生 $Q_{it}$ 的概率。类似的，将 $t$ 时段的初始库容离散为各种可能值，用指标 $K$ 表示离散的个数。用 $S_{kt}$ 表示 $t$ 间段内已知的随机初始蓄水状态，它的概率 $PS_{kt}$ 未知。这是因为 $S_{kt}$ 还与未知运行策略有关。令指标 $j$ 和 $l$ 表示 $t$ 时段末或 $t+1$ 时段内相应的入流和初蓄状态。给定了 $t$ 时段内初蓄 $S_{kt}$，入流 $Q_{it}$和末蓄$S_{l,t+1}$，则决策放水量$R_{kilt}$由连续方程确定如下

$$R_{kilt}=S_{kt}+Q_{it}-E_{klt}-S_{l,t+1} \tag{1}$$

式中 $E_{klt}$ 为时段 $t$ 内在给定 $S_{kt}$ 和 $S_{l,t+1}$ 的可能蒸发和渗漏量。

令 $PR_{kilt}$ 为 $R_{kilt}$未知的概率，它是 $S_{kt}$，$Q_{it}$ 和 $S_{l,t+1}$的联合概率。在最优运行策略中，对于t时段内每一 $S_{kt}$ 和 $Q_{it}$ 将存在唯一的 $S_{l,t+1}$使得条件概率

$$P_r\left[l/k\cdot i\cdot t\right]=PR_{kilt}/\sum_{l}PR_{kilt} \tag{2}$$

为 1 。即对唯一的最优策略指标 $l=l^*(k, i, t)$，可用下列各式

$$PR_{l,j,t+1}=\sum_{\substack{k \\ l=l^*(k,\,i,\,t)}}\sum_{i} PR_{kit}\cdot P^{t}_{ij} \quad \forall\, k, i, t \tag{3}$$

$$\sum_{k}\sum_{i} PR_{kit} = 1 \qquad \forall t \tag{4}$$

$$PS_{kt} = \sum_{i} PR_{kit} \qquad \forall k,\ t \tag{5}$$

$$PQ_{it} = \sum_{k} PR_{kit} \qquad \forall i,\ t \tag{6}$$

$$PS_{lt+1} = \sum_{k}\sum_{\substack{i \\ l=l^*(k,i,t)}} PR_{kit} \qquad \forall l,\ t \tag{7}$$

求出 $PR_{kil}$ 以及 $PS_{kt}$，$PQ_{it}$ 和$PS_{l,t+1}$ 的值，其中 $PR_{kilt}$为初始蓄水量 $S_{kt}$、入流量 $Q_{it}$ 和末蓄水量 $S_{l,t+1}$的稳态联合概率；$PS_{kt}$、$PQ_{it}$和 $PS_{l,t+1}$ 为初蓄 $S_{kt}$，入流 $Q_{it}$和末蓄 $S_{l,t+1}$ 的边缘概率分布。$P^t_{ij}$ 为 $t$ 时段内入流状态为 $Q_{it}$ 到 $t+1$ 时段内入流状态为 $Q_{j,t+1}$的状态转移概率。

当综合利用水库或水力发电水库的运行策略达到了优化稳定时，相应的蓄水状态概率 $PS_{kt}$，入流状态概率 $PQ_{it}$ 以及相应于稳定策略 $l=l^*$（$k$，$i$，t）的状态 $S_{kt}$、$Q_{it}$、$S_{l,t+1}$ 的联合概率 $PR_{kit}$ 均达到了稳定状态。这是由马尔柯夫随机过程遍历性所决定的。要计算稳态概率，须求解下列线性方程组先求出稳态联合概率 $PR_{kit}$。

$$\begin{cases} PR_{l,j,t+1} = \sum\limits_{k}\sum\limits_{i} PR_{kit}\cdot P^t_{ij} & (8) \\ \sum\limits_{k}\sum\limits_{i} PR_{kit} = 1 & (9) \end{cases}$$

然后由（5）、（6）两式推求出稳定状态概率 $PS_{kt}$，$PQ_{it}$。

从方程组（8）式和（9）式中可知；如时段末的稳态概率为未知，须将所有时段的 $PR_{kit}$ 作为未知变量求解。即在策略达到稳定时，须求解含 $T\cdot K\cdot L$ 个未知变量的方程组。当策略未知时，则要解 $T\cdot K\cdot I\cdot L$个方程。在时段数 $T$，状态数 $K$ 和 $I$ 较多的情况下难以在一般计算机上实现。如 M－240D 大型机上只允许解 3 500 个变量的线性方程组，当时段数为 12（以月计），在策略达稳定时，则在 M－240D 机上其状态数不能超过 17。同时，即使在允许变量范围内，由于变量太多，每个表达式或等式中就含有$T\cdot K\cdot I$ 个变量。在编制程序时极不方便。为了避开解线性方程的困难，可在优化计算中根据已出现的稳定条件，引进下述的迭代方法直接推求稳态联合概率。

**2.稳态概率的迭代方法**

由上述可知 $t$ 时段的末库容 $S_{l,t+1}$和紧跟着入流 $Q_{j,t+1}$的联合概率必须等于 $t+1$时段初蓄水状态和入流状态的联合概率。即必须满足下列条件

$$\sum_{k}\sum_{i} PR_{kilt}\cdot P^t_{ij} = \sum_{m} PR_{l,j,m,t+1} \qquad \forall l,i,t \tag{10}$$

该式当策略达到最优且稳定时与式(8)是等价的。为了对(10)式进行迭代求出稳态概率$PR_{kit}$，首先对(10)作简略的变化。等式右边对 $m$ 求和，等式的左边对 $K$ 先组合，有

$$\sum_{i}\left(\sum_{k}PR_{kilt}\right)\cdot P^{t}_{ij}=PR_{l,j,t+1} \tag{11}$$

这就是进行迭代所期望的等式。

令$SPR_{l,j,t+1}=PR_{l,j,t+1}$，则（11）式变为

$$\sum_{i}\left(\sum_{k}PR_{kilt}\right)\cdot P^{t}_{ij}=SPR_{l,j,t+1} \tag{12}$$

当 $t=1$ 时，假定 $SPR_{ki1}$ 值，使得

$$\sum_{k}\sum_{i}SPR_{ki1}=1$$

如果 $l=l^{*}(k,i,t)$，则

$$PR_{kil1}=SPR_{ki1} \tag{13}$$

否则

$$PR_{kil1}=0.0 \tag{14}$$

然后由式（12）求 $t=2$ 时段的 $SPR_{ki2}$。对以后的时段重复以上工作，可得到各个时段的 $SPR_{kij}$。由于转移概率各时段不变，策略也是优化的稳定策略。当进行了若干次迭代计算后，所求各时段的联合概率 $SPR_{kit}$ 收敛到一个稳定值，而与初始假设的联合概率值无关。

上述方法是建立在水库运行策略达到稳定基础上，用转移概率推求水库运行的稳态联合概率 $PR_{kit}$。然后用(5)式和(6)式计算出稳定蓄水状态概率 $PS_{kt}$ 以及来水状态概率 $PQ_{it}$。该法克服了解代数方程组的困难。但须预先假定出起算时刻的一组联合状态概率 $SPR_{kit}$，并与相应时段转移概率相乘而得出时段末的联合状态概率 $SPR_{l,j,t+1}$。如此顺序逐时段递推直至收敛到稳态联合概率。这种迭代方程的运算求解比解大型线性方程组较为容易。

**3.迭代法的可行性和正确性分析验证**

用一简单实例验证推求稳态联合概率迭代法的基本思想及方法的可行性和正确性。分别采用解线性方程组和迭代法两种方法求解实例中的稳态联合概率$PR_{kit}$。

已知有两个时段，两个状态的一动态规划问题，并求得转移概率 $P^{t}_{ij}$，和优化策略 $l^{*}(k,i,t)$。详见表 1 和表 2 。

**表 1　转移概率$P^{t}_{ij}$表**

| | t=1 | | | t=2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| i \ j | 1 | 2 | i \ j | 1 | 2 |
| 1 | 0.7 | 0.3 | 1 | 0.6 | 0.4 |
| 2 | 0.2 | 0.8 | 2 | 0 | 1.0 |

**表 2　稳态概率表**

| t | k | i | l=l*(k,i,t) | PRkilt = PRkit |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0.171 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 0.166 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 0.0 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 0.633 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0.120 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0.051 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0.186 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 0.663 |

如果用求线性方程来推求稳态联合概率，则可由式(8)和(9)建立以下联立方程组：

$$\begin{cases}PR_{1112}+PR_{1122}-0.7PR_{1111}-0.2PR_{1211}-0.7PR_{2111}-0.2PR_{2211}=0\\ PR_{1212}+PR_{1222}-0.3PR_{1111}-0.8PR_{1211}-0.3PR_{2111}-0.8PR_{2211}=0\\ PR_{2112}+PR_{2122}-0.7PR_{1121}-0.2PR_{1221}-0.7PR_{2121}-0.2PR_{2221}=0\\ PR_{1111}+PR_{1121}-0.6PR_{1112}-0.0PR_{1212}-0.6PR_{2112}-0.0PR_{2212}=0\\ PR_{1211}+PR_{1221}-0.4PR_{1112}-1\cdot PR_{1212}-0.4PR_{2112}-1\,PR_{2212}=0\\ PR_{2111}+PR_{2121}-0.6PR_{1122}-0.0PR_{1222}-0.6PR_{2122}-0.0PR_{2222}=0\\ PR_{1111}+PR_{1121}+PR_{1211}+PR_{1221}+PR_{2111}+PR_{2121}+PR_{2211}+PR_{2221}=1\\ PR_{1112}+PR_{1122}+PR_{1212}+PR_{1222}+PR_{2112}+PR_{2122}+PR_{2212}+PR_{2221}=1\end{cases}\tag{15}$$

其中，对任意的 $k$，$i$，$l$，$t$，$PR_{kilt}\geqslant 0$。

对方程组(15)求解，得到稳态联合概率 $PR_{kilt}$的值。

然后再用上述提出的迭代方法对该实例进行迭代求解稳态联合概率 $PR_{kilt}$。由作者编制 FORTRAN77 程序在 M—240D 机上完成。迭代 13 次可达精度要求。并与解线性方程组求出的稳态联合概率 $PR_{kit}$ 相等。从而验证了迭代法推求稳态概率的正确性及可行性。同时可以看出迭代法在时段数 $T$、状态数 $K$、$I$ 增加时的优越性。

## 三、稳态概率的应用

**1. 优化策略的可靠性分析**

当优化策略达到稳定时，这种策略的可靠性如何？须在求出稳态概率的基础上作进一步的分析。

根据相对历时的概念，水库的供水保证率应为正常供水历时与总历时之比值的百分率。如果以月为时段单位，则年周期的历时为 12。当 $t$ 时段的决策水量为 $R_{kilt}$ 时，若 $R_{kilt}$ 小于各目标最低需水量之和时，则认为系统供水遭到破坏。令 $NUM_t(k, i, l)$为 $t$ 时段初始蓄水状态 $S_{kt}$，来水为 $Q_{it}$，末蓄状态为 $S_{l,t+1}$ 时供水破坏的指标变量，则有

$$NUM_t(k, i, l)=\begin{cases}1 & 供水破坏\\ 0 & 正常供水\end{cases}\tag{16}$$

当策略达到最优且稳定时，即 $l=l^*(k, i, t)$ 时，上式为

$$NUM_t(k, i)=\begin{cases}1 & 供水破坏\\ 0 & 正常供水\end{cases}\tag{17}$$

令 $LNO_t(k, i)$为 $t$ 时段至年末供水破坏的累积次数，则可建立下例递推关系式

$$\begin{cases}LNO_{12}(k, i)=NUM_{12}(k, i)\\ LNO_t(k, i)=NUM_t(k, i)+\sum_{j=1}^{t}LNO_{t+1}(l, j\cdot P^t_{ij}\end{cases}\tag{18}$$

逆时序依次代入递推到年初，即递推到 $t=1$ 时段，则有

$$LNO_1(k,\ i)=NUM_1(k,\ i)+\sum_{t=1}^{11}\left\{\sum_{c=1}^{t}P_C\right\}LNO_{t+1}(k,\ i) \tag{19}$$

表示在以年初状态 $S_{k1}$、$Q_{i1}$ 条件下的年运行过程供水破坏次数。与 $LNO_1(k,\ i)$ 对应存在其相应的稳态概率 $PR_{ki1}$，则年供水破坏次数 $SUM$ 即为 $LNO_1(k,\ i)$ 的数学期望值：

$$SUM=\sum_{k=1}^{kI}\sum_{i=1}^{II}LNO_1(k,\ i)\cdot PR_{k,i,1} \tag{20}$$

年供水保证率 $P$ 可计算如下：

$$P=〔1-1/12\cdot SUM〕\cdot 100\% \tag{21}$$

如果将(19)式代入(20)式，则有如下的矢量表达式

$$SUM=PR_1\cdot(NUM_1+P^1NUM_2+\cdots+P^1P^2\cdots P^{11}NUM_{12}) \tag{22}$$

再将 (3) 式代入则得到

$$SUM=\sum_{t=1}^{12}\sum_{k=1}^{kI}\sum_{i=1}^{II}PR_{kit}\cdot NUM_t(k,\ i) \tag{23}$$

相应的供水保证率的计算式为

$$P=〔1-1/12\cdot\sum_{t=1}^{12}\sum_{k=1}^{kI}\sum_{i=1}^{II}PR_{kiT}\cdot NUM_T(k,\ i)〕\cdot 100\% \tag{24}$$

式(21)和(24)都是在对全年周期累积供水破坏次数分析的基础上导出的。具体计算时，以在计算程序中方便、计算量少为准绳，采用其中一式即可计算出供水保证率。从分析途径可知(24)式的计算必须计算和贮存各个时段(月)的稳态联合概率，其计算费用和内存量都比(21)式有较高的要求。

采用以上方法求出的供水保证率是针对系统整体而言，即是系统的供水保证率。它不同于各用户的保证率，但各用户的用水保证率可用系统的供水保证率来间接反映。

对于系统内各用户的供水保证率的分析与系统供水保证率的分析方法相同。不同的是每个用户在分析供水保证率时，须设一套变量，以区别于推求系统保证率的变量。其中计算量也要成倍地增加。

**2.年期望弃水量的分析**

年期望弃水量的计算基本上与保证率的计算相同。当策略达到最优且稳定时，各用户用水量之和为 $USW_t(k,\ i)$，则 $t$ 时段在 $k$、$i$ 状态下的弃水量为决策放水量 $R_{kit}$ 与 $USW_t(k,\ i)$ 之差，即为

$$LW_t(k,\ i)=R_{kit}-USW_t(k,\ i) \tag{25}$$

令 $SLW_t(k,\ i)$ 为 $t$ 时段至年末弃水量的累积量，则可建立下列递推关系式：

$$\begin{cases}SLW_{12}(k,\ i)=LW_{12}(k,\ i)\\ SLW_t(k,\ i)=LW_t(k,\ i)+\sum\limits_{j=1}^{II}P^t{}_{ij}\cdot SLW_{t+1}(l,\ j)\end{cases} \tag{26}$$

逆时序依次代入递推到 $t=1$ 时段，则有

$$SLW_1(k,\ i)=LW_1(k,\ i)+\sum_{t=1}^{11}\left\{\sum_{c=1}^{t}P_C\right\}\cdot SLW_{t+1}(l,\ j) \tag{27}$$

则年期望损失水量值为

$$LWAT=\sum_{k=1}^{kI}\ \sum_{i=1}^{II}SLW_1(k,\ i)\cdot PR_{k,i,1} \tag{28}$$

同理也可用下式计算年期望损失水量

$$LWAT=\sum_{t=1}^{12}\ \sum_{k=1}^{kI}\ \sum_{i=1}^{II}PR_{kit}\cdot LW_T(k,\ i) \tag{29}$$

式（28）和（29）的优缺点与式（21）和（24）相同。

分析计算了稳态联合概率，并用它推出系统的供水保证率以及年期望弃水量后，通过可靠性约束的随机优化计算来提高在优化稳定策略下的供水保证率。这样做将减少年效益，计算时间和费用也要成倍地增加。

## 四，实例分析

用云南省昭通地区渔洞水库断面的径流资料结合该水库的综合利用优化计算对稳态概率的分析及其应用作实例分析。

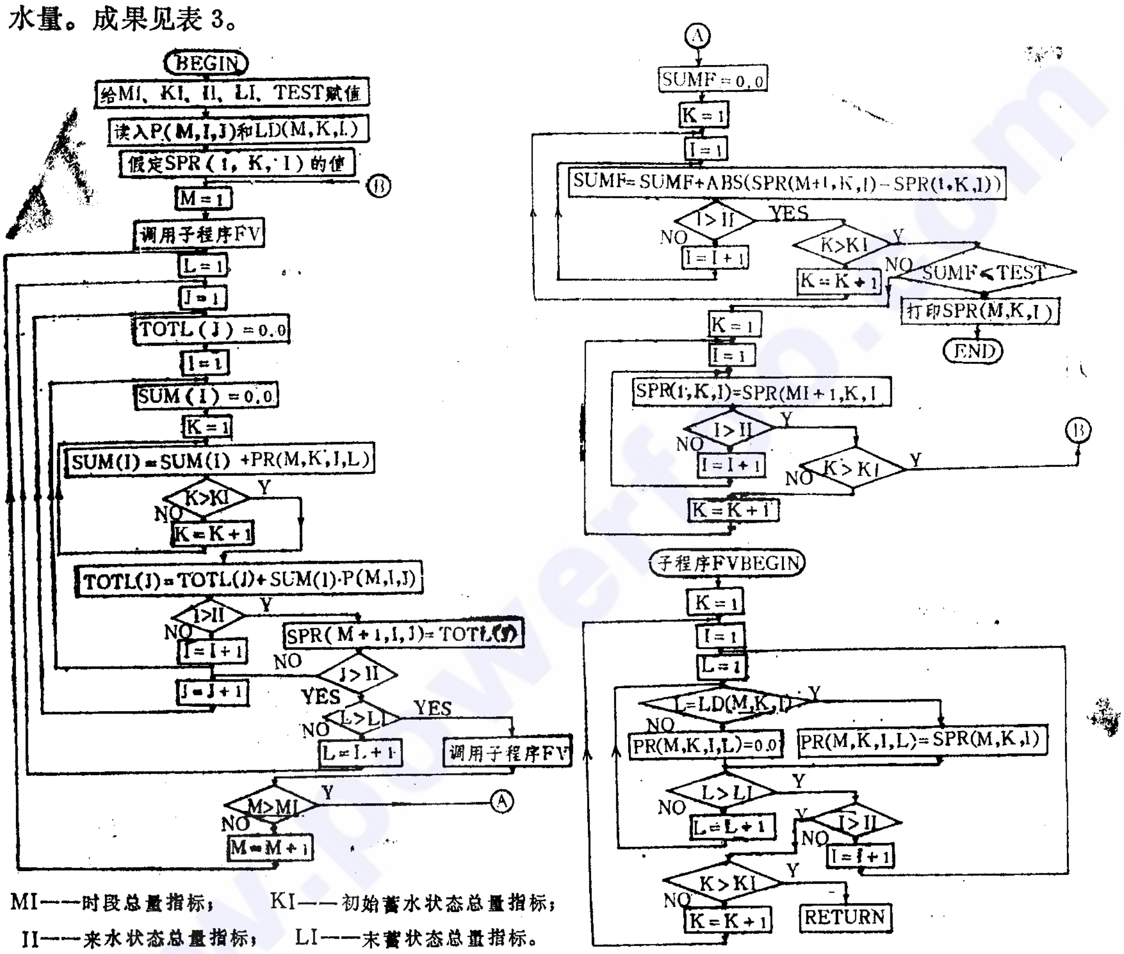
渔洞水库位于滇东北高原乌蒙山系西北部、洒渔河上游的居乐河上。集雨面积为709km²，河长 81 km，河道平均比降 6.2%，流域平均高度 2 440 m，多年平均径流量 3.649 亿 m³。采用该断面 1954 年至 1983 年共 30年的实测整编径流资料进行转移概率 $P^t_{ij}$ 的分析，然后根据本文所述的稳态联合概率迭代的基本思想和方法，编制FORTRAN77程序在 M—240D 机上计算出稳态概率 $PR_{kit}$。FORTRAN77 程序框图

表 3　保证率及用水量成果表

| 正常高水位 | m | 1977 | 1981 | 1985 | 1988 | 1989 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 兴利库容 | 万m³ | 19012 | 23401 | 28301 | 32312 | 33715 |
| 投资 | 万元 | 22212.44 | 23266.40 | 24318.13 | 25510.134 | 25666.16 |
| 年期望效益 | 万元 | 2334.3835 | 2467.7749 | 2472.9292 | 2478.0000 | 2480.6407 |
| 保证率 | % | 88.5 | 99.5 | 99.8 | 99.95 | 100 |
| 期望用水量 | 亿m³ | 3.244 | 3.507 | 3.513 | 3.520 | 3.522 |
| 期望弃水量 | 亿m³ | 0.278 | 0.015 | 0.009 | 0.003 | 0.0 |
| 工业居民用水量 | 亿m³ | 1.790 | 2.051 | 2.056 | 2.063 | 2.068 |
| 灌溉用水量 | 亿m³ | 1.006 | 1.006 | 1.006 | 1.006 | 1.006 |
| 发电用水量 | 亿m³ | 0.448 | 0.451 | 0.451 | 0.450 | 0.458 |

注：效益栏成果摘自作者研究生毕业论文

如下图所示。然后在优化运算过程中，即在 $t$，$k$，$i$ 状态下选出系统目标最优效益的同时，选出相应的用水量 $USW_t$（$k$，$i$）（各用户用水量之和）、相应的末库容及其最优策略。最后按本文所述方法和步骤计算系统的供水保证率 $P$ 和期望用水量或期望弃水量。成果见表 3。




稳态概率迭代程序框图

## 五、结 语

本文对稳态概率的分析及其在优化过程中的应用作了较详细的论述。将迭代法引入时段间流量相关情况下的稳态联合概率的计算，克服了在时段数和状态数较多的情况下解大规模线性方程组的困难与不便。为高精度的优化计算中推求系统的稳态概率，为进行优化策略的可靠性分析开辟了新的途径。系统的供水保证率的分析与系统的最小供水量有关。在推求时应对系统的最小用水量作出合理的决策。否则，供水保证率的计算结果将因人而异。这是使用该方法时应注意避免的。