对流扩散方程FTCS差分格式稳定性分析研究

武周虎
（陕西机械学院水电学院）

摘　要

本文提出并论证了常系数线性对流扩散方程FTCS差分格式稳定性的充分必要条件及变系数对流扩散方程FTCS差分格式稳定性的必要条件。该条件增大了稳定性区域，将给数值计算选择步长带来更大方便。

前　言

对流扩散方程是一个具有双自变量的二阶偏微分方程。由于实际问题中，初值、边值条件的复杂性，一般在数学上尚无法求出其解析解，因而人们常借助于电子计算机，结合初值及边值条件采用数值法求解。就数值法而言，采用的格式是各种各样的。但差分法中常利用时间取前差，空间取中差的构造格式。对于该格式的稳定性条件Fromm（1964）利用Von Noumann方法进行研究，得出稳定性条件：

$$S=\frac{E\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant 1/2 \tag{1}$$

$$R_c=\frac{u\Delta x}{E}\leqslant 2\ 或\ d\leqslant 2S \tag{2}$$

[1][2]

式中　$d=u\Delta t/\Delta x$。

从笔者的分析推导看出，格子Reynolds数$Rc\leqslant 2$的条件并不是稳定与不稳定的临界状态。因此本文仍利用Von Noumann方法进行分析研究，提出了临界状态下新的稳定性条件。是对原来条件的补充和完善。即为$S=(E\Delta t/\Delta x^2)\leqslant 1/2$

$$\Delta t\leqslant\frac{2E}{u^2}\ 或\ d^2\leqslant 2S \tag{3}$$

对流扩散方程FTCS差分格式稳定性分析研究

笔者提出对流扩散方程FTCS差分格式的稳定性条件为（1）、（3）两式。为了论证这个问题，可以直接从差分格式出发，进行推证。

（一）常系数线性对流扩散方程

首先考虑最简单的常系数线性方程

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}=E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{4}$$

式中　u 表示对流流速（m/s），E 表示扩散系数（m^2/s），C 表示扩散物质浓度。

FTCS 差分格式（时间取前差、空间取中差）

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+u\frac{C_{i+1}^n-C_{i-1}^n}{2\Delta t}=E\frac{C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

令 $d=u\Delta t/\Delta x$，$S=E\Delta t/\Delta x^2$

则　$$C_i^{n+1}=C_i^n-\frac{1}{2}d\left(C_{i+1}^n-C_{i-1}^n\right)+S\left(C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n\right) \tag{5}$$

设 C_i^n 为差分格式在节点（$i\Delta x$，$n\Delta t$）的真解，$\overline{C_i^n}$ 是该点的数值解，则误差为

$$\varepsilon_i^n=\overline{C_i^n}-C_i^n$$

显然，差分格式的数值解 $\overline{C_i^n}=C_i^n+\varepsilon_i^n$ 满足（5）式

$$C_i^{n+1}+\varepsilon_i^n=C_i^n+\varepsilon_i^n-\frac{d}{2}\left(C_{i+1}^n+\varepsilon_{i+1}^n-C_{i-1}^n-\varepsilon_{i+1}^n\right)+$$
$$S\left[C_{i+1}^n+\varepsilon_{i+1}^n-2\left(C_i^n+\varepsilon_i^n\right)+C_{i-1}^n+\varepsilon_{i-1}^n\right] \tag{6}$$

用（6）式减去（5）式得

$$\varepsilon_i^{n+1}=\varepsilon_i^n-\frac{d}{2}\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n)+S(\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n \tag{7}$$

这就是误差传播方程。

现用 Von—Nuemann 方法进行稳定性分析。假定只有初始误差，边界上没有误差，而且数值计算过程中也不引入新的误差。在这种简单情况下来考虑误差传播。首先，将初始误差利用 Fourier级数表示成简谐波和的形式：

$$\varepsilon_i^n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_K e^{IKX_i}$$

式中　$I=\sqrt{-1}$

则
$$\varepsilon_i^n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A^n e^{IKX_i}$$

$$\varepsilon_i^{n+1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A^{n+1}e^{IKX_i} \tag{8}$$

$$\varepsilon_{i\pm1}^n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A^n e^{IK(X_i\pm\Delta x)}$$

将（8）式代入（7）式，并令放大因子$G=A^{n+1}/A^{n}$，$\theta=K\Delta X$，可得：

$$G=1-\frac{d}{2}(e^{I\theta}-e^{-I\theta})+S(e^{I\theta}+e^{-I\theta}-2) \tag{9}$$

利用恒等式

$$\left.\begin{aligned} e^{I\theta}+e^{-I\theta}&=2\cos\theta \\ e^{I\theta}-e^{-I\theta}&=2\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

得：

$$G=1-2S(1-\cos\theta)-Id\sin\theta$$

G是一个复数，其实部为R_e，虚部为I_m则

$$R_e=1-2S(1-\cos\theta)$$

$$I_m=-d\sin\theta$$

于是可得到下式

$$\left[\frac{R_e-(1-2S)}{2S}\right]^2+\left[\frac{I_m}{d}\right]^2=1 \tag{11}$$

根据稳定性条件，放大因子必须满足$|G|\leqslant1$，即有

$$R_e^2+I_m^2\leqslant1 \tag{12}$$

（12）式是表示在复平面上的单位圆及其内部，（11）式表示一个中心在实轴上，位于（$1-2S$，0），$2S$和$|d|$分别为椭圆的长短轴，如右图所示。要使椭圆在单位圆内，则必须满足$2S\leqslant1$或$S\leqslant1/2$和在切点（1,0）处椭圆的曲率半径不大于1。由后面一个条件可找出S与d的关系式。为了习惯起见，我们将（11）式中的R_e、I_m分别用x、y表示，则

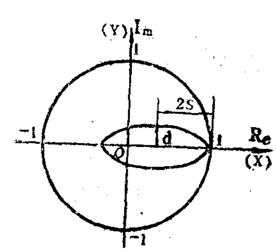

图 1

$$\left[\frac{x-(1-2S)}{2S}\right]^2+\left[\frac{y}{d}\right]^2=1 \tag{11'}$$

求该椭圆的曲率半径。

（11′）式对x求导，

$$\frac{x-(1-2S)}{(2S)^2}+\frac{yy'}{d^2}=0$$

令$\frac{d^2}{4S^2}=a$，则

$$a[x-(1-2S)]+yy'=0 \tag{13}$$

（13）式再对x求导：

$$a+y'^2+yy''=0 \tag{14}$$

由曲率半径公式

$$R=\frac{1}{|K|}=\frac{(1+y'^{2})^{3/2}}{|y''|} \tag{15}$$

得

$$R(x,y)=\frac{\{y^{2}+a^{2}[x-(1-2S)]^{2}\}^{3/2}}{ay^{2}+a^{2}(x-(1-2S))^{2}}$$

所以 $R(1,0)=2Sa=d^{2}/2S\leqslant 1$

即（3）式 $d^{2}\leqslant 2S$

又因 $d=\dfrac{u\Delta t}{\Delta x},\quad S=\dfrac{E\Delta t}{\Delta x^{2}}$

所以 $$\Delta t\leqslant\frac{2E}{u^{2}} \tag{3'}$$

则（1）、（3）或（3′）为新得到的稳定性条件。

下面将进一步通过由曲率半径R（1，0）$\leqslant 1$得到的稳定性条件

$$S\leqslant 1/2;\ \Delta t\leqslant\frac{2E}{u^{2}}\ 或 d^{2}\leqslant 2S$$

为稳定性的充分必要条件。即证，在满足上述条件时，格式一定稳定，否则$S\leqslant 1/2$，$d^{2}>2S$，格式一定不稳定。

单位圆方程 $$x^{2}+y^{2}=1 \tag{16}$$

椭圆方程 $$\left[\frac{x-(1-2S)}{2S}\right]^{2}+\left(\frac{y}{d}\right)^{2}=1 \tag{11'}$$

设在横座标为x时，单位圆的纵座标为$\pm y_{1}$，椭圆的纵座标为$\pm y_{2}$。作辅助函数，

$$f(x)=y_{1}^{2}-y_{2}^{2}=(1-x^{2})-\{d^{2}-\frac{d^{2}}{4S^{2}}[x-(1-2S)]^{2}\} \tag{17}$$

考察函数$f(x)$的特性，若$f(x)$在$|x|\leqslant 1$时，不为负值则椭圆不会超出单位圆外，格式稳定。否则（$f(x)<0$），椭圆将超出单位圆外，格式不稳定。

$$f'(x)=-2x+\frac{2d^{2}}{4S^{2}}[x-(1-2S)] \tag{18}$$

令 $x=1-\delta_{x}$，（$\delta_{x}\geqslant 0$）及$d^{2}=2S(1+\delta_{S})$并忽略二阶小量得

$$f'(\delta_{x})=2[\delta_{x}+\delta_{S}-\delta_{x}/2S] \tag{19}$$

讨论：因为 $2S\leqslant 1$ 所以 $\delta_{x}\leqslant\delta_{x}/2S$

（Ⅰ） 当 $\delta_{S}\leqslant 0$ 即$d^{2}\leqslant 2S$时

由（19）式得 $f'(\delta_{x})\leqslant 0$

所以$f(x)$为单调递减函数。由（17）式知$f(1)=0$，则有

$\delta_{x}\geqslant 0$，即$x\leqslant 1$时，$f(x)\geqslant 0$，或$|y_{1}|\geqslant|y_{2}|$。

故此时椭圆不会超出单位圆外，格式稳定。

（Ⅱ）当$\delta_{S}>0$ 即$d^{2}>2S$时

由（19）式得：

$$\lim_{\delta_x \to 0} f'(\delta_x) = \lim_{\delta_x \to 0} 2\left(\delta_x + \delta_s - \frac{\delta_x}{2S}\right) = 2\delta_s > 0$$

$f(x)$ 在 $x=1$—0的区域内为递增函数。因为，$f(1)=0$，所以有 $f(x)\leqslant 0$，$|y_1|\leqslant|y_2|$。

故此时椭圆将会超出单位圆，格式不稳定。故（1）式 $S\leqslant 1/2$和（3）式 $d^2\leqslant 2S$ 是对流扩散方程 FTCS差分格式稳定性的充分和必要条件。

另外，根据lax 等价定理，（1）、（3）两式也是对流扩散方程，FTCS 差分格式收敛于微分方程的充分必要条件。下面以 d 为纵座标，以 S 为横座标，绘稳定性区域图形作一对比。由图可以看出，Fromm（1964）给出的稳定性区为Ⅰ区域。而本文给出的稳定性区域包括了 Fromm 给出的Ⅰ区和新增加的Ⅱ区。新的稳定性区域（Ⅰ＋Ⅱ）比原来的稳定性区域增大了 17%，将给数值计算选择步长，带来更大的方便。

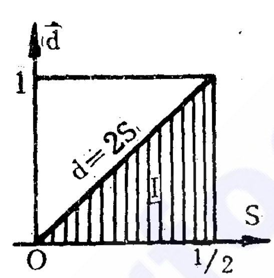

图 2 Fromm(1964)给出的稳定性区域Ⅰ

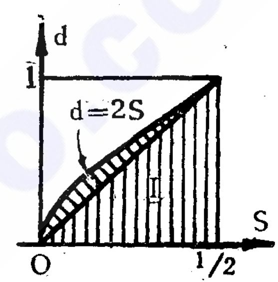

图3 本文给出的稳定性区域（Ⅰ＋Ⅱ）

（二）变系数线性对流扩散方程

上面的结论不难顺利地推广到变系数情况

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial C}{\partial x} = E(x,t)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{20}$$

FTCS 差分格式为

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u_i^{n+1}\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta t} = E_i^{n+1}\frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{21}$$

对（21）式变系数方程采用局部常数，即把$u_i^{n+1}=u(x_i,\ t_{n+1})$，$E_i^{n+1}=E(x_i,\ t_{n+1})$看作与标号（$i$，$n+1$）无关，再用与前面相同的方法步骤推导稳定性条件，得到的结果与（1）、（3）式类似，为

$$S=\frac{E_i^{n+1}\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant 1/2 \tag{22}$$

$$\Delta t\leqslant\frac{2E_i^{n+1}}{(u_i^{n+1})^2} \tag{23}$$

可以证明（22）（23）两式是（21）式稳定性的充分必要条件。在实际选取步长时，将按下式选取

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\cdot\max_i|E_i^{n+1}|\leqslant 1/2 \tag{22'}$$

$$\Delta t \leqslant \frac{2\max\limits_{i} |E_i^{n+1}|}{\max\limits_{i} (u_i^{n+1})^2} \tag{23'}$$

结　　论

1．作者认为过去采用Fromm（1964）推导的对流扩散方程FTCS差分格式的稳定性条件

$$\begin{cases} S = \dfrac{E\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant 1/2 \\ R_C = \dfrac{u\Delta x}{E} \leqslant 2 \end{cases}$$

其中，$R_C \leqslant 2$ 条件不够完善。

2．作者从理论分析表明，对流扩散方程FTCS差分格式的稳定性条件为

$$\begin{cases} S = \dfrac{E\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant 1/2 \\ \Delta t \leqslant \dfrac{2E}{u^2} \end{cases}$$

并证明了该条件为稳定性的充分必要条件。稳定性区域增大了，给数值计算，选择步长，采用变步长带来更大的方便。

参　考　文　献

〔1〕罗奇，《计算流体力学》，1976年

〔2〕中山大学编，《计算流体力学》，1982年

〔3〕程心一，《计算流体动力学》，1983年

冕宁县水电公司发行电力建设债券

凉山彝族自治州冕宁县水电公司从今年三月起，在县内外各企、事业单位和个人中发行200万元电力建设债券，以充分利用社会闲散资金解决观音岩水电站的资金缺口。

电力建设债券面额分50；100；500元三种，从1991年3月起年内一次还本付息。债券利息按年限比银行个人定期储蓄存款月息增加40%，委托县农业银行代理发行，由县水电局从解放桥电站、红星电站、供电所上缴年利润100万元中“以电养电”资金为担保抵押金。根据国务院《企业债券管理暂行条例》的规定，这一办法已经得到县政府和州人民银行的批准。

凉山彝族自治州冕宁县经委　毛幼熙