随机水文学

丁　晶　高荣松　邓育仁

（成都科技大学）

——续一——

（一）水文过程的特性

随机水文学是以随机水文过程作为研究对象。为了说明水文过程的特性，现以一个站历年的月径流过程为例加以剖析。

一个站的月径流过程，一般说来呈现着明显的冬季枯水、春季中水、夏季洪水、秋季中水的季节性变化。出现这种周期性规律的原因是由于地球绕太阳旋转引起的。这是一种由确定因素导致的确定性变化。此外，在月径流过程的形成中还要受许多错综复杂的随机因素影响，而这些不确定因素影响的径流，随机地叠加在周期成分之上，于是使各年的月径流过程变化多端无法事先预测。在月径流过程中受随机因素影响而叠加在周期成分上的数值可以是正，也可以是负，其数学期望为零。所以历年逐月月径流的算术平均值可以视作月径流过程的周期成分。而各月径流的实测值与相应月份月径流平均值之差就是受随机因素影响的径流值，可用简单的方程表示这样的组合关系：

$$Q(t)=P(t)+N(t) \qquad t=1,2,\cdots,12(\text{月}) \qquad (1)$$

式中　$Q(t)$是月径流过程；$P(t)$是周期成分，是历年各月径流的数学期望，各年的过程都相同；$N(t)$是随机成分，每年的过程都不相同。因此，$P(t)$与$N(t)$合成的月径流过程$Q(t)$每年都不相同。所以我们说月径流过程是一种随机过程。

随机成分$N(t)$常常包含有相依成分与纯随机成分两个分量。前者表现在相邻月份，甚至相隔几个月的月径流之间有一定程度的相依(相关)关系。另外由于受气候长期的变化趋势（一般不予考虑）或人类活动的影响，月径流过程呈现出有随时间的增加而缓慢地递增或递减趋势，甚至有时还存在有突变现象。因此，一个比较完整的年内月径流组合方程应为：

$$Q(t)=T(t)+S(t)+P(t)+D(t)+\varepsilon(t) \qquad (2)$$

式中　$T(t)$为趋势成分；$S(t)$为突变成分；$D(t)$为相依成分；$\varepsilon(t)$为纯随机成分；其余符号表示的意义同前。

方程（2）的概念适用于任何水文过程，例如按一定标准选的年最大洪水过程，年最小枯水过程等。但不是每一种过程都包含有所有的成分，例如年降水过程常常是一个独立随机过程，即只有$\varepsilon(t)$项，于是方程为：

$$X(t)=\varepsilon(t) \qquad (3)$$

式中　$X(t)$为年降水过程。

以上分析的是水文过程的基本特性，是随机水文学研究的基础。

（二）随机过程的意义

当进行随机试验时，每次试验的结果是自变量的某种函数。在相同条件下进行试验的结果，使函数每次得到事先未能确定的各种形式，这样的函数叫随机过程。每次试验结果称随机过程的一个现实或样本函数。随机过程是所有现实的集合（总体）。

从前面的分析可知，水文过程基本上是符合上述定义的。例如我们要研究某站的洪水过程时，所观测到的每次洪水过程就是一个现实，所有观察到的各次洪水（现实）的集合是这个随机过程的现实组。

随机过程通常以 $X(t)$ 表示，而各个现实则用 $x_i(t)$，$i=1, 2\cdots$，表示。图 1 表示的随机过程包含有 $m(m\to\infty)$ 个现实。

由图 1 可知，随机过程是一簇函数（现实），当自变量 t 一定，例如 $t=t_1$ 时，每个现实都有一个相应的读值，如图 1 上的 x_{11}，x_{21}，…，x_{m1} 点，这些值构成一个随机变量 $X(t_1)$，我们把它叫做随机过程在 $t=t_1$ 时的截口（截口代表的是一定时间的随机变量）。因而随机过程又有另外的定义：当给定一个时刻 t_1，则 $X(t_1)$ 是一个随机变量。例如在年内月径流这样一个随机序列中，当 $t=1$（即 1 月份）时，$X(t_1)$ 就表示 1 月径流这个随机变量，也叫随机序列在 $t=1$（月）的截口。

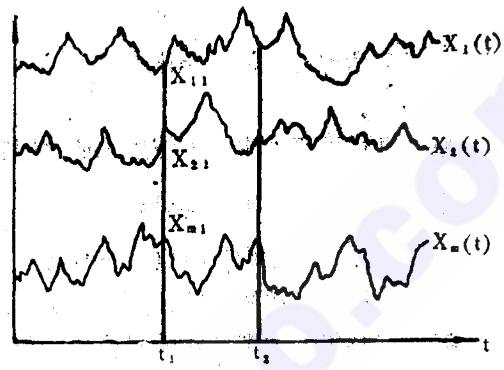

图 1　随机过程示意图

一般随机过程是指自变量 t 连续地取有限区间内的值，如 t 取离散值则称为随机序列。

水文过程一般多为连续时间的过程，为了便于运用计算机研究，通常都进行离散化处理。即时间采用间隔为 Δt 的离散值（$t_1=\Delta t$，$t_2=2\Delta t$，…，$t_n=n\Delta t$），每个区间的状态（即取值）采用该区间的平均或总和。例如年流量序列，月径流（月平均流量或月总量）序列，日雨量序列等。

（三）随机过程的统计特性

大家知道，一个随机变量可用它的分布函数来描述。随机过程 $X(t)$ 可以看成是它所有截口的总和，而每一个截口表示一个随机变量，因而可以用各截口所表示的随机变量的联合分布加以描述。实际上这样作很困难。因此通常象描述随机变量一样，随机过程的基本统计特性用一些数字特征来描述。在随机水文学中最常用的有数学期望、方差、协方差函数等。

1．随机过程的数学期望

随机过程各截口的一阶原点矩

$$\mu(t)=E\,[X(t)] \tag{4}$$

叫随机过程的数学期望或均值。随机过程的数学期望就是各截口数学期望的集合（均值函数）。

2．随机过程的协方差函数

对一个随机过程，任意两个不同时刻 t_1 和 t_2，$X(t_1)$，$X(t_2)$ 的二阶中心相关矩：

$$C_x(t_1, t_2)=E\{[X(t_1)-\mu(t_1)][X(t_2)-\mu(t_2)]\} \tag{5}$$

称为随机过程的自协方差函数，简称为协方差函数，也有人称为相关函数。

3．随机过程的方差

（5）式中，当 $t_1=t_2=t$ 时

$$C_x(t,\ t)=E\{[X(t)-\mu(t)]^2\}=\sigma x^2(t) \qquad (6)$$

称为随机过程的方差。

4．标准化协方差函数

二元函数

$$\gamma_x(t_1,t_2)=\frac{C_x(t_1,\ t_2)}{\sigma_x(t_1)\ \sigma_x(t_2)} \qquad (7)$$

叫随机过程的标准化协方差函数或标准化相关函数。实质上就是两个截口 $X(t_1)$，$X(t_2)$ 的相关系数。

在随机过程研究中常常使用中心化随机过程，即随机过程各截口所表示的随机变量与该截口数学期望之差，以 $\dot{X}(t)$表示。

$$\dot{X}(t)=X(t)-\mu(t) \qquad (8)$$

上述随机序列的统计特性用一个例子来说明。

某站有45年（水利年）的月流量资料，将每年的月流量序列（习惯称为年内月流量过程）作为一个现实，则这个随机序列共有45个测观的现实，利用这个现实组来估计随机序列的统计特征。

一年有12个月，每月计算一个多年平均流量，所得到的12个平均月流量值（见表1中的第91行）就是研究序列12个截口的数学期望，它们（即12个截口的数学期望）的集

表1　某站年内月径流随机序列及统计特征表

序号	年份	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	1月	2月	3月	4月	5月
1	1937	604	1290	1150	1260	931	402	258	187	158	157	164	248
2		(94)	(337)	(99)	(260)	(279)	(57)	(39)	(18)	(18)	(24)	(14)	(26)
3	1938	479	777	1010	1280	577	304	203	148	129	125	155	238
4		(-31)	(-176)	(-41)	(280)	(-75)	(-41)	(-16)	(-15)	(-11)	(-8)	(5)	(16)
5	1939	680	922	1170	1070	646	364	227	166	135	133	145	213
6		(170)	(-31)	(119)	(70)	(-8)	(19)	(8)	(3)	(-5)	(0)	(-5)	(-9)
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
89	1981	359	652	702	825	414	283	175	135	121	116	121	145
90		(-151)	(-303)	(-349)	(-175)	(-238)	(-62)	(-44)	(-28)	(-19)	(-17)	(-29)	(-77)
91	均值	510	953	1051	1000	652	345	219	163	140	133	150	222
92		(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
93	均方差	115	248	306	249	148	63.1	31.9	20.0	14.9	13.0	22.3	46.7
94	γ(1)	0.46	0.50	0.59	0.44	0.49	0.72	0.95	0.96	0.96	0.91	0.60	0.52
95	γ(2)	0.45	0.24	0.45	0.33	0.51	0.36	0.80	0.88	0.91	0.81	0.46	0.27

合称年内月径流随机序列的数学期望。同样12个截口均方差的集合就是此随机序列的均方差（表中第93行）。第94行是这个随机序列滞时为1（月）的标准化相关函数值，例如0.46是5、6两月月流量的相关系数。第95行是滞时为2（月）的标准相关函数值，例如0.24是5、7两月月流量的相关系数。因月流量序列是周期序列，上年末与下年初的流量是衔接的，所以表中滞时为1和2的相关函数值都是12个。

表中括号内的数是这个随机序列的中心化数值。例如第4行中的（−31）是479与该截口数学期望值510之差。中心化随机序列的数学期望为零，即表中的92行。

（四）平稳随机过程

上述实例中的随机序列，其均值、均方差及标准化相关函数值每个月都不相同，也就是说这些统计参数随时间t而变。凡随机过程（序列）的统计性质随自变量t的变化而改变的叫非平稳随机过程。反之，一个随机过程的统计性质不随t的变化而改变的叫平稳随机过程。

一个随机过程，它的数学期望不随时间而变，也就是各截口的数学期望都相同，这样的随机过程叫具有均值平稳或一阶平稳。

$$\mu_x(t)=\mu_x=\text{常数} \tag{9}$$

如果一个随机过程的协方差函数（或标准化相关函数）不随时间t而变，只随间隔时间τ（t_2-t_1）而变，即

$$C_x(t_1,t_2)=C_x(\tau) \tag{10}$$

或

$$\gamma_x(t_1,t_2)=\gamma_x(\tau) \tag{11}$$

则称这个随机过程为协方差平稳。当$\tau=0$时，$C_x(0)=D_x=\sigma_x^2$，这意味着协方差平稳必然是方差平稳。

如果一个随机过程既一阶平稳又协方差平稳叫广义平稳或称弱平稳、二阶平稳、宽平稳等。

对于平稳过程，我们举一个水流的脉动现象作为例子。为了研究水流的脉动现象，在某河流断面上的一个固定点连续观测m次流速，每次观察了n分钟（m和n都很大），设整个观测期内基本水流条件不变。每分钟计算一个平均流速列在表2中。这是一个具有m个现实的随机序列现实组，用这个现实组估计出随机序列的均值介于0.83～0.86之间，均方差介于0.25～0.27之间，二者变化都不大。经统计检验表明，各截口的均值间与

表2　某河段某点水流脉动现象及统计特征值表

行号	测次 ＼ 序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	时间（分）	1	2	3	4	……	n−1	n	均值	均方差	Cv	γ_1	γ_2
1	1	0.862	0.852	0.866	0.861	……	0.834	0.844	0.832	0.251	0.302	0.03	0.06
2	2	0.841	0.844	0.848	0.841	……	0.863	0.852	0.861	0.262	0.308	−0.02	−0.03
3	3	0.834	0.832	0.834	0.859	……	0.848	0.839	0.846	0.254	0.300	0.04	0.04
4	4	0.839	0.869	0.858	0.862	……	0.851	0.841	0.859	0.268	0.312	0.06	0.02
5	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6	m	0.868	0.855	0.852	0.854	……	0.853	0.850	0.848	0.255	0.301	−0.07	−0.05
7	均　值	0.850	0.841	0.856	0.843	……	0.856	0.846					
8	均方差	0.261	0.258	0.264	0.261	……	0.256	0.262					
9	Cv	0.307	0.306	0.308	0.310	……	0.298	0.310					
10	γ_{1t}	—	−0.02	0.08	0.07	……	−0.04	0.09					
11	γ_{2t}	—	—	0.01	0.06	……	0.08	−0.05					

流速单位：米³/秒

方差间（或均方差）都没有显著差异，判断这个序列属均值平稳和方差平稳。而序列各种滞时的相关系数（表2中只列了滞时1和2两种）值都很小，经统计检验表明它们与零无显著差异，说明这又是一个独立随机序列*。根据上述特性可以判断这是一个独立平稳随机序列。

应该特别说明，根据样本估计随机序列的统计特征时，因抽样误差关系，各截口的统计参数不会完全相等，而是围绕着随机序列总体的统计特征值在波动。

类似的序列在水文上是不少的，如年降水序列、年最大洪峰流量序列、年最小流量序列等。

水文过程大多是非平稳的随机过程，如洪水流量过程、年内月流量序列、日流量序列等。但可以采用适当方法处理为准平稳过程（将在以后介绍）。

（五）平稳随机过程的各态历经性

按照随机过程的定义，要推算其统计特征时，需要足够多的现实，按截口计算统计特征值，这在实际工作中很难办到，在水文工作中经常碰到的是只有一个观测到的样本（现实）。如果要研究的过程是平稳的，且能够用一个现实去求统计特征，就会给工作带来很大的方便。

在上例中，如每次观测（即每个现实）的n很长，对各次观测的n个流速分别计算其均值、均方差（或方差）以及滞时k（例中$k=1,2$）的相关系数，显然共有m组这样的统计参数，即表2中最后五列的数值。这些数值中，均值（第8列）的变化范围介于0.83～0.86之间，均方差(第9列)的变化范围介于0.25～0.27之间，它们分别与前述各截口的均值（第7行）与均方差（第8行）的变化范围相同。经统计检验表明，各个现实的均值之间与均方差之间都无显著差异。又各现实滞时k（表中只列了$k=1,2$）的相关系数γ_k很小，经统计检验判断它们与零均无显著差异，说明每个现实都是独立随机系列。据上述特性可以作出这样的判断：由于研究序列各现实的统计特征基本一致，说明它们都是来自同一总体，和前述各截口的统计特征一样，也是围绕着这个随机序列总体的统计征在波动，因此只需要一个现实就可以估计该随机序列的统计特征。

一个平稳过程，如果根据一个现实，当时间足够大时，在时间轴上求得的统计特征逼近于平稳过程的统计特征，平稳过程具有的这种统计特性叫各态历经性或称遍历性。

统计特征，通常是指均值与自协方差，一般用下式计算

$$\mu_x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \tag{12}$$

$$C_x(k)=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(x_i-\mu_x)(x_{i+k}-\mu_x) \tag{13}$$

式中 μ_x表示均值；x_i表示变量；N表示离散时间数；$C_x(k)$表示滞时为k的自协方差。

随机过程各态历经性（或遍历性）的含义，可以理解为在样本较大的情况下，各个样本都同样经历了随机过程的各种可能状态，因此从任何一个样本就可以得出随机过程

* 独立随机序列（或过程）与纯随机序列（或过程）是同义词，本讲座交互使用。

的全部统计信息，所以，每一个样本（现实）的特性都可以充分代表随机过程的特性。

不是所有的平稳过程都具有各态历经性，它必须要符合一定的数学条件。但是，在实际工作中要检验能否满足条件是相当困难的。通常是先从过程的物理本质出发加以分析，如果认为具有各态历经性，就按此假设进行分析计算，看所得的结论是否符合实际，如符合则认为假设合理，否则应重新考虑。

（六）水文时间序列的组成

前面已经谈过，水文时间序列一般可看成由确定成分与随机成分组成。确定成分一般具有一定的物理概念，能用预测的方法来确定，它包括周期的和非周期的成分；随机成分由不规则的振荡和随机影响组成，它不能严格地从物理上来阐明，只能用概率的概念来描述，它分为平稳的和非平稳的两种情况。水文时间序列的组成如图2所示。

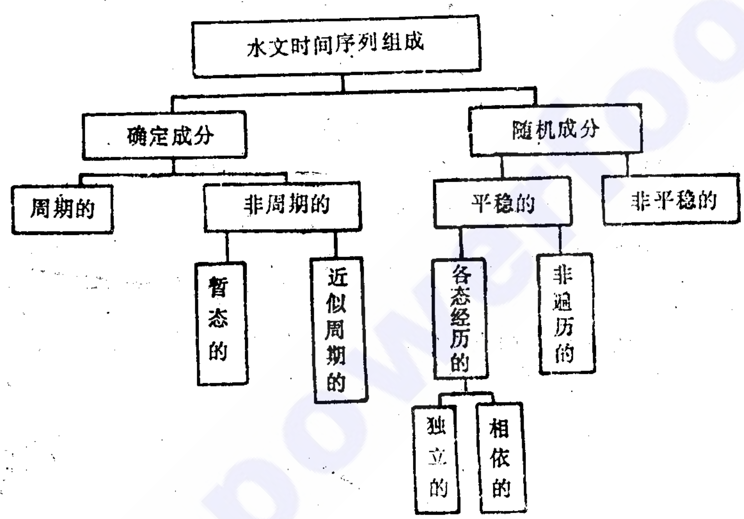

图2　水文时　序列组成图

确定成分中的周期成分，是由于地球绕太阳旋转和地球自转等的影响形成的。如径流量、降水量和蒸发量具有年周期；温度、蒸发等有日周期。一般可通过相关分析和谱分析（在下一讲中介招）鉴别时间序列中的隐含周期，并常用傅里叶级数来模拟。

确定成分中的非周期成分，一般是暂态成分，是时间序列中偶然发生的暂时成分，通常被迭加在其它成分（如周期成分或随机成分）之上。它常表现为趋势和跳跃两种形式，趋势表现为水文时间序列（扣除周期成分以后）的均值或其它参数随时间增加而呈

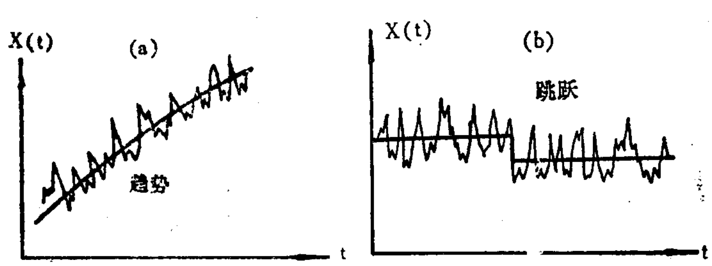

图3　时间序列均值中含有趋势及跳跃形式的暂态成分

缓慢的有规律的变化（图3）。产生趋势的原因主要是水文环境受人为因素的影响造成的。例如流域上大量修建灌溉工程会使年径流量呈现随时间增加而递减的趋势；沿河筑堤防洪会使洪峰流量呈现上升趋势。趋势常呈线性的或非线性的形式。常用最小二乘法、回归分析法或滑动平均法加以鉴别和提取。跳跃是在时间上出现的突变现象(图3(b))。跳跃主要是人为的影响或大自然的突变（如跨坝、地震）引起的。跳跃现象表现在时间序列的均值、方差、离差系数、偏态系数或序列相关系数的突变。

确定成分中，近似周期成分的鉴别和模拟方法与周期成分类似。

水文时间序列除去确定成分以后剩下来的是随机成分，它可能是平稳的也可能是非平稳的。对非平稳的时间序列可以用适当方法处理为准平稳的时间序列。对平稳的水文时间序列，在分析中常常看作是具有各态历经性的。

平稳时间序列又可分为独立的和相依的两类。年最大流量序列属独立平稳的水文时间序列。有的年径流流量序列，呈现出年与年之间流量有一定的相关关系，因此，它们属于平稳相依的水文时间序列。

独立平稳的水文时间序列用概率模型模拟，如皮尔逊Ⅲ型分布、正态分布等。相依的平稳水文时间序列常用自回归模型（也叫马尔柯夫模型）、滑动平均模型等模拟。

综上所述，水文时间序列大多数是合成序列，即由两种或两种以上的成分组成，一般情况可用下列公式或图4形式表示。

$$X(t)=T(t)+S(t)+P(t)+N(t) \tag{16}$$

或

$$X(t)=T(t)+S(t)+P(t)+D(t)+\varepsilon(t) \tag{17}$$

式中　$X(t)$表示水文时间序列，其余符号的意义同公式（2）。

我们观测到的样本函数是各种成分的综合，但由于每种成分有其各自的特性，这些特性在时间序列中总会有所反映，于是可以采用适当方法，按照反映的显著程度逐一鉴别与提取。

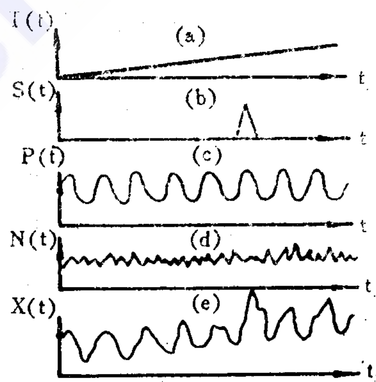

图4　水文时间序列分解图

在鉴别和提取各种成分时必须注意水文现象的物理成因分析。

参　考　文　献（略）