

岩石的脆性破裂理论

范景伟

(成都科技大学)

一、经典的格里费斯理论

格里费斯 (Griffith, A. A) 在1924年导出了二维应力状态下脆性材料的破裂准则。他认为脆性材料的强度主要由材料内部裂痕的周边应力集中来控制。这些裂痕就是岩石中大量方向杂乱的、以颗粒边界形式存在的、潜在的破坏带。格里费斯将内部裂痕视为扁平的椭圆，且忽略相邻裂痕之间的影响。当椭圆端部的拉应力值大于该处的抗拉强度就导致在该处发生破裂。

岩石中椭圆裂痕在二维应力状态下的情况如图1所示。分析时采用以压应力为正， $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，且忽略中间主应力 σ_2 的影响。

根据应力莫尔园可得：

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\beta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\beta \\ &= \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (2)$$

现在我们以 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 的坐标系来讨论问题。在分析讨论的任一阶段都可以用方程(1)和(2)代入以恢复用主应力 σ_1 和 σ_3 来表达。

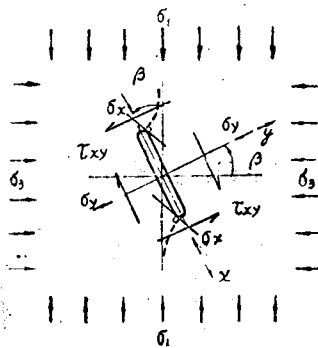


图1 岩石中椭圆形裂痕的应力状态

据根弹性理论：在无限远处存在二维应力状态下，椭圆周边上的切向应力为(图2)：

$$\textcircled{1} \sigma_b = \frac{\sigma_x \{ m(m+2) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \}}{m^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} + \frac{\sigma_y \{ (1+2m) \sin^2 \alpha - m^2 \cos^2 \alpha \}}{m^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} + \frac{\tau_{xy} \{ 2(1+m)^2 \sin \alpha \cos \alpha \}}{m^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

式中 $m = \frac{b}{a}$ 。

象岩石这样的材料中,认为椭圆裂痕具有很小的轴比 m 。这意味着:最大拉应力将发生在靠近椭圆裂痕端点处,即偏心角 α 很小处。当 $\alpha \rightarrow 0$,则 $\sin \alpha \rightarrow \alpha$, $\cos \alpha \rightarrow 1$,同时在公式的分子中忽略其高阶微小量,则(3)式可简化成

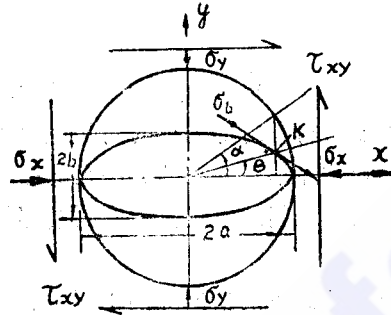


图2 作用于二维应力系统中椭圆裂痕周边上的切向应力

$$\sigma_b = \frac{2(\sigma_y m + \tau_{xy} \alpha)}{m^2 + \alpha^2} \quad (4)$$

这里可以看出 σ_x 对 σ_b 影响很小,同理可以推测 σ_y 对 σ_b 影响也小。

椭圆裂痕边壁上的最大切向应力发生在下列条件,即 $\frac{d\sigma_b}{d\alpha} = 0$ (5)

$$\text{也即} \quad (m^2 + \alpha^2) 2\tau_{xy} = 2(\sigma_y m + \tau_{xy} \alpha) 2\alpha \quad (6)$$

$$\text{或写成} \quad \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2\sigma_y}{m\tau_{xy}\alpha} - \frac{1}{m^2} = 0 \quad (7)$$

$$\text{解方程得} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m\tau_{xy}} \left\{ \sigma_y \pm (\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (8)$$

将(6)式代入(4)式,得

$$\textcircled{2} \sigma_b = \frac{2(\sigma_y m + \tau_{xy} \alpha)}{m^2 + \alpha^2} = \frac{\tau_{xy}}{\alpha} \quad (9)$$

根据(8)式和(9)式得

$$\sigma_b m = \sigma_y \pm (\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

①成都地质学院翻译的K. G. 斯塔格和O. C. 普基维茨主编的“工程实用岩石力学”一书中公式(4、3) τ_{xy} 前的负号应改为正号,且其中的 $(1+m^2)$ 应改为 $(1+m)^2$ 。该书中公式(4、4)、(4、5)和(4、6)中的 τ_{xy} 符号均应反号。要注意: σ_b 代表K点的切向应力,K点的坐标为 $x = a \cos \alpha$, $y = b \sin \alpha$, $\tan \theta = m \tan \alpha$ 。 α 角和 θ 角均从x轴逆时针为正。

②由于正应力以压为正,所以 σ_b 为拉应力时,其值必为负。如果 τ_{xy} 为正,则 α 应为负值。这说明在 $+\tau_{xy}$ 作用下,周边上切向拉应力区发生在第四象限内,符合实际情况,请参考图1。而“工程实用岩石力学”一书公式(4、5)为 $\sigma_b = \frac{-\tau_{xy}}{\alpha}$,这里也可看出 τ_{xy} 前符号有误。

公式(10)中的负号表示拉应力,它促使裂痕受拉破坏,所以不取正号,于是

$$\sigma_{bm} = \sigma_y - (\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

由于裂痕周围材料的局部抗拉强度和轴比 m 实际上都不易测量,不如用一个比较容易测量的量来表示上式中的 σ_{bm} 项,这样可以方便得多。这样的量就是含有大量方向杂乱的岩石单轴抗拉强度 $-\sigma_t$ (注意:本文抗拉强度 σ_t 本身不带符号)。在单轴抗拉条件下,岩石中大量方向杂乱的裂痕中,裂痕长轴与拉应力方向相垂直的那个裂痕必将首先破裂,它也应满足公式(11)。于是可将 $\sigma_y = -\sigma_t$ 和 $\tau_{xy} = 0$ 代入(11)式,就可得到

$$\sigma_{bm} = -2\sigma_t \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式,且等式两边平方之,得

$$\tau_{xy}^2 = 4\sigma_t(\sigma_y + \sigma_t) \quad (13)$$

现在我们想知道在 σ_1 和 σ_3 作用下,最大主应力 σ_1 和裂痕长轴的夹角 β (也就是裂痕面的法线和 σ_3 的夹角)为多大时, σ_b 为最大。也即推求岩石内大量方向杂乱的裂痕中,那个裂痕的 σ_b 最大。根据(1)式和(2)式可改写(11)式为

$$\begin{aligned} \sigma_{bm} &= \sigma_y - (\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \beta) - (\sigma_1^2 \sin^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

对上式取导,并令其等于零,得

$$\frac{d\sigma_{bm}}{d\beta} = \left\{ 2\sigma_1 - 2\sigma_3 - \frac{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}{(\sigma_1^2 \sin^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} \right\} \sin \beta \cos \beta = 0 \quad (15)$$

$$\text{于是, 可得 } \beta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \cos 2\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} \quad (16)$$

由于 $|\cos 2\beta| \leq 1$,所以上式第三个解答要求

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 > 0 \quad (17)$$

方程(13)是 τ_{xy} 和 σ_y 平面中的一个抛物线方程式,它指示着破裂开始时,一个张开的椭圆裂痕边壁上,剪应力 τ_{xy} 和正应力 σ_y 之间的关系,及其相应的 β 角。假定椭圆裂的倾角 β 是这样的,即无论主应力 σ_1 和 σ_3 怎样组合,边壁应力都是最大的,则(13)式成为一系列莫尔圆的包络线方程。图3所表示的就是一系列莫尔圆中的一个。根据这个圆的几何关系以及根据由方程式(13)所决定的包络线的法线的斜率,得出

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{d\sigma_y}{d\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{2\sigma_t} \quad (18)$$

根据(9)式和(12)式得

$$\sigma_{bm} = -2\sigma_t = \frac{\tau_{xy} m}{\alpha} \quad (19)$$

$$\text{因此 } \alpha = \frac{-m\tau_{xy}}{2\sigma_t} = -m \operatorname{tg} 2\beta \quad (20)$$

上式表明了椭圆裂痕边壁上最大拉应力的位置(α)与 β 角的关系。

根据图3的几何关系,可得

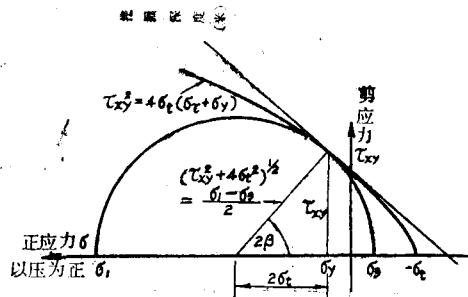


图3 椭圆裂痕上开始破裂时所需要的正应力和剪应力之间的关系

①“工程实用岩石力学”书中公式(4.11)似有误,根据该书的符号规定应为 $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{d\sigma_y}{d\tau_{xy}} = -\frac{\tau_{xy}}{2\sigma_t}$. 该书公式(4.19)也有同样错误。

$$\cos 2\beta = \frac{2\sigma_t}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (21)$$

由(16)式和(21)式得

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (22)$$

这就是格里费斯破裂准则用 σ_1 和 σ_3 的表达式,注意:此式必须在 $\sigma_1 + 3\sigma_3 > 0$ 的时候才成立。

现在我们研究一种最简单的张性破坏,此时最小主应力等于材料的单轴抗拉强度,即 $\sigma_3 = -\sigma_t$ 。这种破坏是由于一个垂直于最小主应力方向($\beta = 0$)的裂痕沿其端部($\alpha = 0$)进一步破裂所造成的。根据图4,可以看出莫尔包络线与 $\tau_{xy} = 0$ 的正应力轴交点上,其莫尔包络线的曲率半径等于 $2\sigma_t$ (将 $\tau_{xy} = 0$ 代入图3中莫尔圆的半径($\tau_{xy}^2 + 4\sigma_t^2$)^{1/2}中即得 $2\sigma_t$)。因而,所有落在这个半径为 $2\sigma_t$ 园内的莫尔园只能在 $\tau_{xy} = 0$ 和 $\sigma_3 = -\sigma_t$ 的这一点接触破裂包络线。这意味着:纯张性破坏发生在 $\sigma_1 \leq -3\sigma_3$ 的条件,也即 $\sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0$,此时的破裂准则为

$$\sigma_3 = -\sigma_t \quad (23)$$

也就是说:当 $\beta = 0$, $\sigma_1 \leq 3\sigma_3$ 时,只有在 σ_3 达到 $-\sigma_t$ 时椭圆裂痕才破裂。在图5上表现为AB直线。同理,当 $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\sigma_3 \leq 3\sigma_1$ 时,也只有在 σ_1 达到 $-\sigma_t$ 时椭圆裂痕才破坏在图5上表现为AC直线。

现在可以归纳一下,经典的格里费斯破裂准则用 σ_1 和 σ_3 表示时,如果规定 $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_3$,则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + 3\sigma_3 > 0 \text{ 时 } (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) &= 0 \\ \sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0 \text{ 时 } \sigma_3 &= -\sigma_t \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

图5中ABD线即表示上两式的图形。

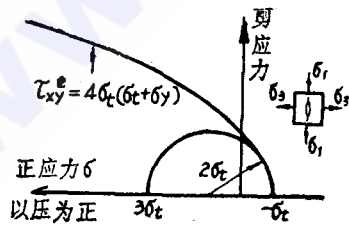


图4 纯张性破裂

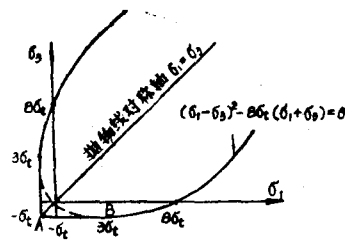


图5 格里费斯破裂准则以主应力表达的图形

二、修正的格里费斯理论

经典格里费斯模式的重要特征是:裂痕是张开的。但是裂痕可能在压应力下闭合,这在岩石力学问题中是经常发生的。当裂痕闭合后,进一步的位移只有在闭合面上滑动,并且将受到一个滑动摩擦力。麦克林托克(MCCLINTOCK)和瓦尔西(Walsh)在1962年首先考虑这种效应来修正费里格斯理论。这个理论进一步由霍埃克(Hoek)、勃雷斯(Brace)、缪勒(Murrell)、宾尼乌斯(Bieniawski)等加以发展。

麦克林托克和瓦尔西假定裂痕闭合需要在无限远处有正应力 σ_c 。于是他们认为图6 (a) 中已经闭合的裂痕面上的正应力是 $\sigma_n = \sigma_y - \sigma_c$ 。而且有一个摩擦力 $\tau_f = f\sigma_n$ (式中 f 是裂痕内的摩擦系数) 来阻止这个面上的滑动。 τ_f 的实际方向必须选择与滑移的方向相反。在图6 (a) 中移动是向着 B 和 B' 的箭头方向, 所以 τ_f 必须是图中表明的方向。如果在这上面叠加一对相等的拉应力 $-\sigma_n$ 和一对相等的剪应力 τ_f , 如图6 (b) 和 (c) 所示。这样的结果是裂痕在无限远处有正应力 $\sigma_y - \sigma_n = \sigma_c$ 和剪应力 $\tau_{xy} - \tau_f = \tau_{xy} - f(\sigma_y - \sigma_c)$ 。这是由于图6 (b)、(c) 所表示的应力状态在裂痕端部所产生的应力比 (d) 的端部应力较小, 可以忽略不计。因此图6中 (a) 和 (d) 所产生的裂痕端部应力基本相同, 根据公式 (4), 我们得

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{2\sigma_c m + 2\alpha [\tau_{xy} - f(\sigma_y - \sigma_c)]}{m^2 + \alpha^2} \\ &= \frac{2m\sigma_c + 2\sigma^0}{m^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\sigma^0 = 2 [\tau_{xy} - f(\sigma_y - \sigma_c)]$

$$\begin{aligned} &= 2 \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta - f \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\beta - \sigma_c \right) \right] \\ &= (\sigma_1 - \sigma_3) [\sin 2\beta + f \cos 2\beta] - f(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_c) \end{aligned} \quad (26)$$

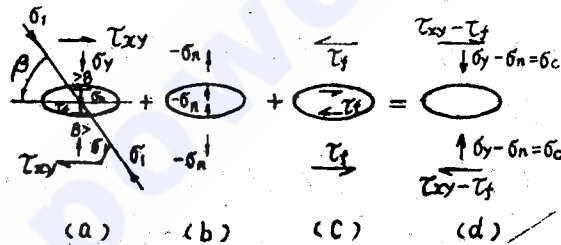


图6

(25) 式对 α 取导, 并令其等于零, 得

$$\frac{d\sigma_b}{d\alpha} = \frac{-2(2m\sigma_c + \alpha\sigma^0)\alpha}{(m^2 + \alpha^2)^2} + \frac{\sigma^0}{m^2 + \alpha^2} = 0$$

即
$$\frac{2m\sigma_c + \alpha\sigma^0}{m^2 + \alpha^2} = \frac{\sigma^0}{2\alpha} \quad (27)$$

于是
$$\frac{\alpha}{m} = \frac{-2\sigma_c \pm (4\sigma_c^2 + \sigma^0)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^0} \quad (28)$$

将 α 值代回 (25) 式, 得 σ_b 的极值为

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{\sigma^0}{2\alpha} = \frac{\sigma_0^2}{-2\sigma_c \pm (4\sigma_c^2 + \sigma^0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2m} \\ &= \frac{2\sigma_c \pm (4\sigma_c^2 + \sigma^0)^{\frac{1}{2}}}{2m} \end{aligned} \quad (29)$$

因为我们感兴趣的是拉应力, 故上式中应取负号, 则

$$\sigma_b = \left[2\sigma_c - (4\sigma_c^2 + \sigma^0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{1}{2m} \quad (30)$$

我们再将 σ_b 和裂痕长轴与最大主应力的夹角联系起来,求 β 值多大时 σ_b 最大。由于 σ_b 中只有 σ^0 是 β 的函数,所以可将 σ^0 对 β 取导,并令其等于零,由(26)式得

$$\frac{d\sigma^0}{d\beta} = (\sigma_1 - \sigma_3) [2 \cos 2\beta - 2f \sin 2\beta] = 0$$

$$\text{所以 } \operatorname{tg} 2\beta = \frac{1}{f} \quad (31)$$

$$\text{于是 } \sin 2\beta = \frac{1}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos 2\beta = \frac{f}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (32)$$

与以前一样,引入单轴抗拉强度 $-\sigma_t$,取用(12)式,并代入(30)式,得

$$\sigma_{bm} = -2\sigma_t = \frac{2\sigma_c - (4\sigma_c^2 + \sigma^0)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (33)$$

$$\text{或 } \sigma^0 = 4\sigma_t \left(1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

将(32)式代入(26)式得

$$\sigma^0 = (\sigma_1 - \sigma_3) \left[(1+f^2)^{-\frac{1}{2}} + f^2 (1+f^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - f(\sigma_1 + \sigma_3) + 2f\sigma_c$$

$$\text{且由于 } (1+f^2)^{-\frac{1}{2}} + f^2 (1+f^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+f^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{所以 } \sigma_1 \left[(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f \right] - \sigma_3 \left[(1+f^2)^{\frac{1}{2}} + f \right] = 4\sigma_t \left(1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right)^{\frac{1}{2}} - 2f\sigma_c \quad (35)$$

$$\text{或写成 } \sigma_1 = \frac{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} + f}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f} \sigma_3 + \frac{4\sigma_t \left(1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right)^{\frac{1}{2}} - 2f\sigma_c}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f} \quad (36)$$

这就是麦克林托克和瓦尔西修正的格里费斯破裂准则,它在 σ_1 和 σ_3 的坐标系中是一条直线,勃雷斯认为对于像岩石这样的扁而长的裂痕 σ_c 可以忽略不计,因此上式变成

$$\sigma_1 = \frac{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} + f}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f} \sigma_3 + \frac{4\sigma_t}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f} \quad (37)$$

上式可改写成

$$\textcircled{1} \sigma_1 = \frac{4\sigma_t}{\left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) \sqrt{1+f^2} - f \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)} \quad (38)$$

在忽略 σ_c 的情况下,(38)式可以通过摩尔圆的关系改写成

$$\tau = f\sigma + 2\sigma_t \quad (39)$$

它在 τ 和 σ 坐标系中是一条直线,并且与库仑破坏准则相似,其相似的“粘滞力”为 $\tau_0 = 2\sigma_t$,请参考图4。从上面推导可以看出:修正的格里费斯准则只适用于裂痕正应力 $\sigma_n > 0$ 的情况,因此(38)式所表示的直线不能延伸到 σ 为负值的范围。在这个范围内

•注:目前有的书刊上写成 $\sigma_1 = \frac{4\sigma_t}{\left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right) \sqrt{1+f^2} - f \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)}$ 是错误的。

经典的格里费斯理论更恰当些。

由于抗拉强度 σ_t 不易准确测定,可用抗压强度来代替 σ_t 作为临界量。对于经典的格里费斯准则可以利用(24)式,令 $\sigma_1=R$ (岩石含有所探讨裂痕的单轴抗压强度)和 $\sigma_3=0$,则有

$$R=8\sigma_t \quad (40)$$

由此可看出:岩石抗压强度和抗拉强度的比值为8。对于一般岩石这个数值过小。将(40)式代入(24)式,得

$$\frac{\sigma_1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma_3}{R} + \sqrt{\frac{2\sigma_3}{R} + \frac{1}{4}} \quad (41)$$

对于修正的格里费斯理论可利用(37)式,令 $\sigma_1=R$ 和 $\sigma_3=0$,则有

$$R = \frac{4\sigma_t}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f} \quad (42)$$

将它代入(37)式,则得

$$\frac{\sigma_1}{R} = \frac{\sigma_3}{R} \left[\frac{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} + f}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}} - f} \right] + 1 \quad (43)$$

三、三维应力状态下的格里费斯理论

缪勒(Murrell)于1963年根据二维应力状态的经典格里费斯理论推广到三维应力状态。二维应力状态下,在 σ_1 和 σ_3 的座标系中经典格里费斯准则如图5所示。抛物线的轴为 $\sigma_1=\sigma_3$ 。抛物线通过原点,相切于 $\sigma_3=-\sigma_t$ 和 $\sigma_1=-\sigma_t$ 两条直线,并将其代替抛物线的虚线部分。

在三维情况下,破裂准则是以 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ 直线 ox 为轴的抛物面,它被三个互相垂直的平面($\sigma_1=-\sigma_t$; $\sigma_2=-\sigma_t$ 和 $\sigma_3=-\sigma_t$)截割,并相切于下面三条直线:

1. 平面 $\sigma_1=-\sigma_t$ 和 $\sigma_2=-\sigma_t$ 的交线;
2. 平面 $\sigma_2=-\sigma_t$ 和 $\sigma_3=-\sigma_t$ 的交线;
3. 平面 $\sigma_3=-\sigma_t$ 和 $\sigma_1=-\sigma_t$ 的交线,

参见图7(b)

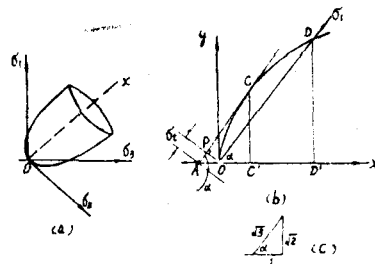


图7

ox 轴与 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 轴夹角的方向余弦为 $l=m=n=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。即

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{2} \quad (44)$$

假定抛物面是抛物线 $y^2 = 4bx$ (45)

的旋转面，式中 b 是待定常数。图 7 (b) 是 (a) 中 $x_0\sigma_1$ 的截面图形。其中 AC 和 ox 轴的夹角为 α 。

$$OP = OAsin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sigma_t = \sqrt{2}\sigma_t \quad (46)$$

因此 $OA = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} \sigma_t = \sqrt{3}\sigma_t$ (47)

(45) 式取导，得 C 点的斜率

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{y} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \quad (48)$$

即得 $y = \sqrt{2b}$ (49)

因此 $CC' = \sqrt{2}b$, $OC' = \frac{b}{2}$, $AC' = b$, $OA = \frac{b}{2}$, $AC = \sqrt{3}b$ (50)

直线 OD 的方程为 $y = x \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}x$ (51)

D 点的坐标可由方程 (45) 和 (51) 联解求得，

因此 $OD' = 2b$, $OD = 2b\sqrt{3}$ (52)

将 (47) 式代入 (50) 式得

$$b = 2\sqrt{3}\sigma_t \quad (53)$$

x 、 y 与 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的关系为

$$x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} \quad (54)$$

$$y^2 = \frac{1}{3} \{ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \} \quad (55)$$

将 (53) (54) 和 (55) 式代入 (45) 式得

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 24\sigma_t (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (56)$$

或者写成八面体应力

$$\tau_{\text{OCT}}^2 = 8\sigma_t \sigma_{\text{OCT}} \quad (57)$$

式中

σ_{OCT} —八面体正应力, $\sigma_{\text{OCT}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$;

τ_{OCT} —八面体剪应力, $\tau_{\text{OCT}} = \frac{1}{3} \{ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \}^{\frac{1}{2}}$

方程 (56) 就是修正的三维应力状态下的格里费斯断裂准则, 它的优点是依据应力不变量来表达的。设 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 就得到单轴抗压强度

$$R = 12\sigma_t \quad (58)$$

它比经典的格里费斯理论 $R = 8\sigma_t$, 提高了一些。

四、小结

1. 目前书刊中对格里费斯理论的介绍往往采用各种不同的符号规定, 有时列出一些公式但又不说明所采用的符号规定, 这使读者造成一些困难。下面的表中汇集了一些有

代表性的书刊中采用的符号规定及其相应的公式，以供参考。

2. 由上面的介绍可以看出：以上公式是根据单个椭圆裂痕来推导的。当椭圆裂痕端部的拉应力值大于该处的抗拉强度就导致材料在该处发生破裂，裂痕就扩展，并将趋向于沿最大主应力 σ_1 方向排列(这已被试验所证实)。如图一虚线所示。由于裂痕扩展过程中方位的变化，其前端的应力集中逐渐减小而扩展停止，可能暂时处于稳定状态。对于真实岩石，随着压应力的增长，从方位最不利的裂痕首先开始破裂，直到岩石的最后破坏有一个复杂的发展过程。

根据宾尼乌斯的试验研究，认为脆性岩石的应力应变曲线可以分成五个区域，如图8所示。A点代表初始裂痕闭合结束；B点为线弹性变形结束和破裂开始；C点相当于岩石的长期强度；D点代表岩石的极限强度。根据修正的格里费斯理论所计算的结果相当于曲线的B点。

综上所述，格里费斯理论只是一种破裂理论，而不是一种宏观的强度理论，但是它对于研究岩石脆性破坏机理是很有用的。这种理论目前正在不断发展过程中。

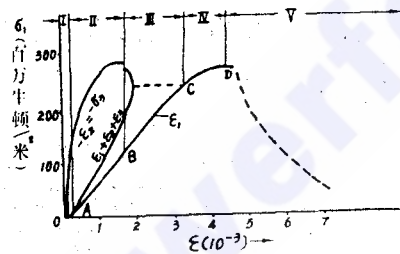


图8 石英岩在轴向压力下的全应力—应变曲线

σ_1 —轴向压应力, ϵ_1 —轴向应变, $-\epsilon_2 = -\epsilon_3$ 横向应变, $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ 体积应变。区域:

I 裂痕闭合; II 线弹性变形; III 破裂稳定发展; IV 破裂不稳定发展; V 断裂。

主要参考文献

1. J. C. Jaeger and N. G. W. Cook《Fundamentals of Rock Mechanics》1971
2. M. S. Paterson《Experimental Rock Deformation—The Brittle Field》1978
3. K. G. 斯塔格和O. C. 晋基维茨主编《工程实用岩石力学》成都地质学院工程地质教研室译。
4. 陶振宇《水工建设中的岩石力学问题》。
5. Z. T. Bieniawski《岩石脆性破裂的机理》中国科学院湖北岩体土力学研究所朱维申译。

表1 室内岩石物理力学性能及其分析

地层	岩性	风化程度(地质分期)	风化程度系数 ^① K _Y (定量)	②(S)	评价	③E/R	评价	比重Δ	干容重γ _D (克/厘米 ³)	吸水率w %	孔隙率n %	干抗压R _D (公斤/厘米 ²)	湿抗压R _w (公斤/厘米 ²)	④软化系数K _R	弹性模量E 10 ⁴ (公斤/厘米 ²)	抗拉强度σ _p (公斤/厘米 ²)	拉度	备注
J ₁₋₂₂ ³	砂质粘土岩	新鲜	1, 新鲜	0.313	V类、极软岩、工程质量坏	197	中等致密	2.7	2.55	7.26	159	94	0.59	1.85				包组J ₁₋₂₂ ⁴⁻² 的砂质粘土岩
J ₁₋₂₂ ⁴⁻⁴	砂质粘土岩(水云母泥质占80%)	新鲜	1, 新鲜	0.09	V类、极软、坏			2.76	2.53	1.4	54	26	0.5					
J ₁₋₂₂ ⁴⁻¹	泥灰岩				V类、极软、坏													未作试验(与J ₁₋₂₂ ³ 类比)
J ₁₋₂₂ ⁴⁻³	石灰岩	新鲜	1, 新鲜	2.87	Ⅱ类、坚硬岩、工程质量良	694	致密	2.69	2.69	0.7	816	856	1.0*	59.4				
J ₁₋₂₂ ⁵⁻¹	砂(半坚硬钙质砂岩)	新鲜	1, 新鲜	1.27	Ⅲ类、半坚硬岩、工程质量中等	429	致密	2.67	2.49	6.7	621	380	0.61	16.3				S=1.76 Ⅲ类、半坚硬, 中等
J ₁₋₂₂ ⁵⁻³	细砂岩(半坚硬、水云母胶结的长石英砂岩)	新鲜	1, 新鲜	0.76	Ⅳ类、极软、差	220	中等致密	2.64	2.25	15	367	227	0.59	5				S=0.75 Ⅳ类、软、差
J ₁₋₂₂ ⁵⁻³	细砂岩(半坚硬、水云母胶结的长石英砂岩)	半风化	0.44, 半风化	0.33	V极软、坏			2.62	2.21	15.7	333	99	0.3	3.55				S=0.42, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ⁵⁻³	细砂岩(半坚硬、水云母胶结的长石英砂岩)	强风化	0.16, 全风化	0.12	V极软、坏			2.62	2.16	22	92	36	0.39	1.51				S=0.16, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ¹⁻¹	高岭土胶结的长石英砂岩, 俗称“泡砂石”	新鲜	1.0, 新鲜	0.44	V极软、坏	261	中等致密	2.64	2.14	18.9	171	132	0.77*	3.44				S=0.48, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ¹⁻¹	高岭土胶结的长石英砂岩, 俗称“泡砂石”	半风化	0.5, 半风化	0.22	V极软、坏			2.63	2.03	21.1	183	66	0.56	1.85				S=0.25, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ¹⁻¹	(第一料场)			0.26	V极软、坏	252	中等致密	2.66	2.1	21	158	78	0.49	1.97				S=0.28, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ¹⁻¹	(第二料场)			0.32	V极软、坏	167	中等致密	2.66	2.14	20	155	97	0.63	1.62				S=0.28, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ¹⁻²	细砂岩(第四料场)			0.26	V极软、坏	262	中等致密	2.61	2.12	18.8	245	79	0.32	2.07				S=0.28, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ¹⁻²	细砂岩(第五料场)			0.49	V极软、坏	236	中等致密	2.59	2.12	18.2	285	146	0.51	3.44				S=0.51, Ⅳ类、软、差
J ₁₋₂₂ ⁵⁻³	细砂岩(第三料场)			0.59	Ⅳ类、差	251	中等致密	2.63	2.22	15.7	366	177	0.46	4.44				S=0.63, Ⅳ类、软、差
J ₁₋₂₂ ⁵⁻³	砂岩石渣料场			0.29	V软、差			2.63	2.13	18.9	206	68	0.33	3.19				S=0.33, V类、极软、坏
J ₁₋₂₂ ⁵⁻³	砂岩石渣料场							2.63	2.13	18.9	206	68	0.33	3.19				S=0.329, V类、极软、坏

说明: ①K_Y=R_{风化}/R_{新鲜}; ②(S)称为简易的岩石工程质量指标=R_w/300; S为岩石工程质量指标=(R_w·E_w/20·10⁶)^{1/2}; ③E/R称为模量比, 值大表示致密, 值小则疏松;

④K_R为软化系数, 除带有*号的二组外, 均为受水影响较大之岩石; ⑤用S(岩规建议方法)和(S)来评价岩石, 完全一致。

表3 試驗建議指標

地層	岩體情況	岩體工程質量		變形模量 $E_{0.01}$ (公斤/厘米 ²)	泊松比(μ)	單位抗力 K_0 (公斤/厘米 ²)	抗力係數 K_0 (公斤/厘米 ²)	牢固係數 (f)	允許承載力 $[\sigma]$ (公斤/厘米 ²)		剪切參數			穩定坡角 (度)	備注
		M	評價						建議值	試驗值	建議值	試驗值	建議值		
J_{1-2z}^3	砂質粘土岩，厚層塊狀，裂隙發育，岩性岩相比較穩定，為基主要持力層及隔水層，成岩裂隙傾角80%為20-25°，走向，傾向無規律，有折壓破裂帶，據導流帶進口統計，裂隙頻率為3-5條/米，裂隙延伸長2米， $K_v=0.8$	0.019	Ⅴ5類，岩體工程質量差，偏于Ⅵ，岩體比較完整，	0.41 0.46	0.3	40	5.2	8	比例極限25 屈服強度35 極限強度50	0.45 0.4 0.3	0.2 0.1 0.1	0.9 0.44 0.33	0.80 1.1 1.1	35	粘土岩本身(圖5)裂隙面，不夾泥(圖4、6)折壓破裂帶(圖5)允許承載力見(圖7)
J_{1-2z}^4	J_{1-2z}^4 各小層層面及 $J_{1-2z}^{4-1}/J_{1-2z}^3$ 接觸面	0.0056	Ⅴ2-Ⅴ3，Ⅵ							0.22	0.05			該四種層面為泥化層面	
J_{1-2z}^4	灰岩，粘土岩約各占50%，灰岩節理裂隙發育，被切成幾何形塊，粘土岩起控制作用	0.6	Ⅴ3，岩體差偏Ⅵ	1.2	0.25	95	3.0	10		0.4	0.1			綜合考慮(粘土岩起大約70%作用)	
J_{1-2z}^{4-2}	粘土岩占90%，灰岩僅10%，前者起控制作用，按 J_{1-2z}^3 考慮	0.019	Ⅴ5，差偏于Ⅵ	0.5	0.3	40	2.5	8		0.4	0.1	0.47	0.8	類比 J_{1-2z}^3	
J_{1-2z}^{4-4}	與 J_{1-2z}^3 相似，但水云母及泥質含量高達80%，結構疏松	0.0036	Ⅴ3，岩體工程質量Ⅵ	0.11-0.12 0.125	0.35	20	1.5	5	$[\sigma]$ 比=15 $[\sigma]$ 屈=20 $[\sigma]$ 屈=25					左岸導流洞出口(圖4)右岸5號平洞(圖4)	
J_{1-2z}^{4-1}	灰岩，粘土岩互層，近等厚，粘土岩起控制作用	0.06	Ⅴ5，差偏Ⅵ	1.2	0.25	95	3	10		0.4	0.1			類比 J_{1-2z}^4	
J_{1-2z}^{4-3-1}	灰岩，粘土岩互層，近等厚，粘土岩起控制作用	0.06	Ⅴ3，差偏Ⅵ	1.2	0.25	95	3	10		0.4	0.1			類比 J_{1-2z}^4	
J_{1-2z}^{4-3-2}	灰岩，粘土岩互層，以石灰岩為主 (灰岩按65%考慮)	0.12	Ⅴ5，中偏Ⅵ	2.0	0.23	160	5	13		0.4	0.1			(圖2)	
J_{1-2z}^{5-1}	質粉砂岩，石英、長石占85%，岩石堅硬，裂隙不發育，0.3條/米	0.166	Ⅴ5，岩體質量中偏Ⅵ	2.2	0.25	175	5	13							

說明：1. J_{1-2z}^4 各小層層面及 J_{1-2z}^{4-1} 與 J_{1-2z}^3 接觸面的 C 、 ϕ 值未作試驗，地質建議按泥化層面考慮，據5號洞 τ_3^{5-3} ， τ_3^{5-2} 二點剪切面有軟弱粘土情況所得 $c=1.1$ ， $\tan\phi=0.33$ (圖4)在屈服強度時 $c=0.75$ ， $\tan\phi=0.27$ ，故取 $\tan\phi=0.22$ ， $c=0.05$ 是可以的。

2. M 值，因未作波速測定，其岩體完整係數 K_v 主要根據裂隙頻率和岩芯獲得率推算出。

表2 加速度信号特征值统计表

测点	测点	深潭爆炸						自然脉动						溢流 1750米³/秒					
		测方	所在部位	测方根值 (10 ⁻³ g)	能量比 $\eta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (%)	最大功率谱密度峰值 (10 ⁸ g ² /Hz)	峰值频率 f (Hz)	测方根值 (10 ⁶ g)	能量比 $\eta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (%)	最大功率谱密度峰值 (10 ⁻¹⁴ g ² /Hz)	峰值频率 f (Hz)	测方根值 (10 ⁻³ g)	能量比 $\eta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (%)	最大功率谱密度峰值 (10 ⁸ g ² /Hz)	峰值频率 f (Hz)				
A1	顺河向	右坝端基岩	4.05	15.4	19	18.5	11.07	9.97	81.2	52.3	13.1	14.6	50	11					
A2	"	18号坝顶	8.68	51.5	618	13.0													
A3	"	17 "	10.32	63.6	1550	13.0													
A4	"	16 "	13.44	65.4	2140	9.0													
A5	竖河向	16 "	8.23	3.47	296	36.0	2.9	2.55	90.3	2.29	13.1	3.5	32						
A6	顺河向	15 "	10.39	41.6	1230	10.0			77.0		13.1	2.7	37	11					
A7	"	13 "	27.5	30.1	540	12.5	1.45	1.37	89.9	1.47	13.1	4.4	20	17.5					
A8	竖河向	13 "	10.14	12.5	200	41.0	1.62	1.61	98	1.88		4.4	50	11					
A9	顺河向	10 "	8.82	34.8	1120	13.0						2.6							
A10	"	7 "	4.65	2.46	195	12.5						0.99	14.6	11					
A11	"	5 "	7.19	48.4	618	15.5													
A12	"	3 "	7.9	33.9	356	19.0	11.07	9.97	81.2	52.3	13.1								
A13	"	1 "	6.87	26.1	214	30.5													
A14	"	16号坝下坝坡	9.84	60.9	1480	12.5													
A15	"	"	7.16	90.5	428	8.5						2.6	39	11					
A16	"	"	6.45	3.08	178	8.5						2.8	12	20.5					
A17	"	"	5.92	2.48	17.6	8.5						2.1	30	11					
A18	"	"	5.35	1.37	70	18.5						1.8	9.4	18					
A19	竖河向	15号坝顺道	5.21	1.26	28	9.0	15.27	13.7	80.8	7.68	5.4	1.6	44.8	11					
A20	竖河向	16 "	4.18	1.88	14.0	11.0						1.5	22.4	11					
A25	顺河向	13 "	6.48	17.0	34	34.5						0.69	41	11					
A26	竖河向	13 "	7.62	5.20	538	10.5	12.15	11.67	92.2	36.6	0.6	1.23	30.6	41					
A32	顺河向	13 "	6.68	3.16	74	19.0						1.63	33.9	30					
A33	竖河向	深潭左侧基岩	4.99	11.1	17	23.5						1.03	21.5	31					
A34	顺河向	深潭右侧基岩	4.84	23.6	24	18.5	70.6	57.8	67.1	1280	22	0.64	9.8	5					

表3 脉动压力信号特征值统计表

测点	测点	溢流 1200米³/秒						溢流 1500米³/秒						溢流 1750米³/秒					
		测方	所在部位	测方根值 10 ⁻³ Kg/cm ²	能量比 $\eta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (%)	最大功率谱密度峰值 (Kg/cm ²) ²	峰值频率 f (Hz)	测方根值 10 ⁻³ Kg/cm ²	能量比 $\eta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (%)	最大功率谱密度峰值 (Kg/cm ²) ²	峰值频率 f (Hz)	测方根值 10 ⁻³ Kg/cm ²	能量比 $\eta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (%)	最大功率谱密度峰值 (Kg/cm ²) ²	峰值频率 f (Hz)				
P1	13号坝面	12.8	25.3	5.03	26.5	15.3	7.54	24.4	6.19	31	45.1	31.78	49.65	124.27	11				
P2	"	8.18	24.1	2.06	11	9.22	4.25	21.3	1.0	29.5	51.67	28.91	31.31	87.75	18.5				
P3	"	31.75	34.9	40.0	11	36.53	20.21	30.6	40.5	18.5	36.77	22.01	35.84	76.5	11				
P4	"	11.33	16.7	6.63	11	13.68	5.91	18.7	7.8	11	34.85	18.33	27.67	41.03	18.5				
P5	"	15.66	32.0	8.58	8	17.85	10.86	37.0	8.0	6	49.57	33.60	45.95	121.52	11				
P6	护坦	13.67	57.7	10.31	11	20.74	15.83	58.3	21.04	11	36.82	26.83	53.1	45.5	11				
P7	"	17.05	65.5	35.75	4	26.29	23.17	77.7	52.87	11	62.76	50.59	64.98	200.2	5				
P8	横河坝侧壁	21.32	24.3	22.8	6.5	31.27	19.5	38.9	189.4	11	34.62	19.65	32.22	37.97	18				
P9	右导墙侧壁	18.70	88.3	18.58	11	37.21	35.48	90.9	15.11	11	73.24	63.63	75.48	630.0	6				
P10	深潭左侧	13.45	64.3	31.9	11	17.27	13.03	56.9	24.76	11	43.16	27.23	39.81	311.7	11				
P11	深潭右侧	7.30	63.6	8.5	11	8.68	6.35	59.5	19.92	11	33.51	17.89	28.5	166.4	11				
P12	深潭右侧	34.45	25.8	45.4	18.5	34.12	14.57	18.2	25.9	18.5	28.67	18.52	40.52	18.27	11				

附录 代表性书刊采用相应公式的符号规定

书刊	本文	K. G. 斯塔格等主编 “工程实用岩石力学”	陶振宇编 “水中的岩石力学问题”	J. C. Jaeger 等编 “Fundamentals of Rock Mechanics”
所采用的符号规定	1. 正应力 σ 以压为正 2. 岩石抗拉强度 σ_1 本身不带号 3. τ_{xy} 及 β 角如下图所示	1. 正应力 σ 以压为正 2. 岩石抗拉强度 σ_1 本身带号 3. τ_{xy} 及 β 角如左图所示	1. 正应力 σ 以拉为正 2. 岩石抗拉压度 σ_1 本身不带号 3. τ_{xy} 及 β 角如下图所示	1. 正应力 σ 以压为正 2. 岩石抗拉强度 σ_1 本身不带号 3. τ_{xy} 及 β 角如下图所示
经典的格里费斯准则	$\tau_{xy}^2 = 4\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_1)$ $\sigma_1 > -3\sigma_3$ $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$ $\sigma_1 \leq -3\sigma_3$ $\sigma_3 = -\sigma_1$ $\cos^2 \beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)}$	$\tau_{xy}^2 = 4\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)$ $\sigma_1 > -3\sigma_3$ $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$ $\sigma_1 \leq -3\sigma_3$ $\sigma_3 = \sigma_1$ $\cos^2 \beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{-2\sigma_1}{2(\sigma_1 - \sigma_3)}$	$\tau_{xy}^2 = 4\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)$ $\sigma_1 > -3\sigma_3$ $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$ $\sigma_1 \geq -3\sigma_3$ $\sigma_3 = \sigma_1$ $\cos^2 \beta = \frac{-(\sigma_1 - \sigma_3)}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{1}{2} \frac{2\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_3)}$	$\tau_{xy}^2 = 4\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_1)$ $\sigma_1 > -3\sigma_3$ $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$ $\sigma_1 \leq -3\sigma_3$ $\sigma_3 = -\sigma_1$ $\cos^2 \beta = \frac{-(\sigma_1 - \sigma_3)}{2(\sigma_1 + \sigma_3)} = \frac{-2\sigma_1}{2(\sigma_1 - \sigma_3)}$
修正的格里费斯准则	$\tau = f\sigma + 2\sigma_1$ $\sigma_1 = \frac{4\sigma_1}{(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}) \sqrt{1 + f^2} - f(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1})}$	$\tau = f\sigma - 2\sigma_1$ $\sigma_1 = \frac{-4\sigma_1}{(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}) \sqrt{1 + f^2} - f(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1})}$	$ \tau = f\sigma - 2\sigma_1$ $\sigma_1 = \frac{-4\sigma_1}{(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}) \sqrt{1 + f^2} - f(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1})}$	$ \tau = f\sigma + 2\sigma_1$ $\sigma_1 = \frac{4\sigma_1}{(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}) \sqrt{1 + f^2} - f(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_2})}$

注: 1. 以上公式均假定以压力为正的条件下 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

2. 岩石抗拉强度 σ_1 本身是否带号的的意思是: (I) 本身不带号, 例如3公斤/厘米²; (II) 本身带号, 例如-3公斤/厘米²。

