

剪切变形对弹性地基上建筑物的影响

郑力平 马连升

(水电部成都勘测设计院)

弹性地基上的梁和框架正越来越广泛地被应用于水工建筑物中。如船闸、泄洪孔、筏闸、电站尾水等。这些结构的各杆件断面大小相差悬殊,应力值受地基变形的影响,虽然剪切变形所占幅度较大,情况也较复杂,但在有关专业书刊上对这方面的讨论仅涉及剪切变形对结构应力的影响,且只限于简单结构,更未考虑地基变形作用。笔者结合设计实践,以某筏闸闸首为例,运用分析对比方法,讨论剪切变形对弹性地基上框架应力的影响,分析影响幅度及其原因。本文中所提出的方法也适用于其它弹性地基上的建筑物。

一、方法与基本公式

众所周知,根据功的互等定理,一般弹性结构在荷载作用下的变位公式为:

$$\Delta_{ki} = \sum \int_0^s \bar{M}_K M_i \frac{dS}{EI} + \sum \int_0^s \lambda \bar{Q}_K Q_i \frac{dS}{GF} + \sum \int_0^s \bar{N}_K N_i \frac{dS}{EF} \quad (1)$$

上式通称莫尔公式,右边的三项分别为弯曲变形,剪切变形及轴向变形。该三项变形值的大小不同,也无一定比例关系,主要与结构型式、材料及断面特征值有关。式中 EI 、 GF 、及 EF 分别为结构的抗弯刚度、抗切刚度及抗压刚度。一般说来,对于板、梁、框架等以弯曲为主的结构,弯曲变形是主要变形;而对于水工建筑物中常见的跨度较小、高度较大的深梁(如胸墙、蜗壳保护层等)结构,切力较大而弯矩相应较小,剪切变形的比例相应较大。

弯曲变形对结构应力的影响已见诸于有关文章,这里着重讨论剪切变形的计算及其对弹性地基上的建筑物应力的影响。

根据莫尔公式,剪切变形由下式求得:

$$\Delta_{ki}^Q = \sum \frac{\lambda}{GF} \int_0^s \bar{Q}_K Q_i dS \quad (2)$$

当变位由单位力产生时, $\bar{Q}_K = Q_i = 1$, (2)式可写为:

$$\Delta_{ki}^Q = \pm \frac{\lambda}{GF} S \quad (3)$$

当变位系由荷载产生时:

$$\Delta_{kp}^Q = \sum \frac{\lambda}{GF} \omega_i Y_K \quad (4)$$

式中 ω_i 为荷载产生的切力图面积; Y_K 为与 ω_i 图形心对应的单位力产生的切力图的纵座标。

在平面应变问题中, (4) 式之 $\frac{\lambda}{GF}$ 项应代之以 $\frac{\lambda \pi E_0}{GF(1 - \mu_0^2)}$ 。这里 λ 为截面形状修正系数, 对于矩形, $\lambda = 1.2$; E_0 为地基的变形模量; μ_0 为地基的泊桑比, G 为材料的剪切模量, 在平面问题中均采用 $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ 计算*, 而这里的 μ 为材料的泊桑比; F 为断面面积。

现以某筏闸闸首下游段的平面变形问题为例(图1), 说明剪切变形的具体算法及其对弹性地基上框架应力的影响。

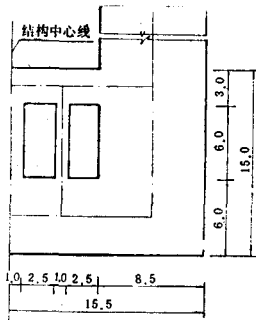


图1 某筏闸结构图

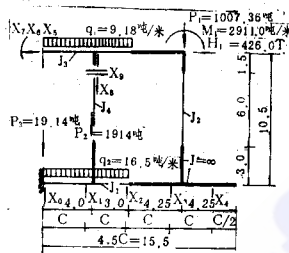


图2 某筏闸计算草图

按半无限弹性体上框架的假定, 利用结构及荷载的对称性, 用链杆法计算时, 先将下底板中点处固定起来, 构成基本系统, 并令该固定端有垂直变位 Y_0 。由于结构及荷载对称, 固定端的角变位 $\varphi_0 = 0$ 。底部设链杆 X_0

$\dots X_4$, 各链杆之间距 $C = \frac{2l}{9} = 3.444$ 米。在上顶板中心处及隔墩上部切开, 并以未知力 $X_5 \dots X_9$ 等代之(隔墩切口处弯矩甚小, 为减少计算量, 予以忽略)。采用的荷载组合为: 结构自重+最大闸门推力。结构自重分别有 q_1, p_2, P_1, P_2, P_3 各项, 人字门推力可分解为力矩 M_1 及水平力 H_1 两项, 作用于上节点。计算草图如图2所示。

未知力共11个, 可由下列法方程组求解:

$$\begin{aligned}
 & X_0 \delta_{00} + X_1 \delta_{01} + X_2 \delta_{02} + X_3 \delta_{03} + X_4 \delta_{04} - Y_0 = 0 \\
 & X_0 \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} + X_5 \delta_{15} + X_6 \delta_{16} + X_7 \delta_{17} \\
 & \quad + X_8 \delta_{18} + X_9 \delta_{19} - Y_0 + \Delta_{1p} = 0 \\
 & X_0 \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + X_4 \delta_{24} + X_5 \delta_{25} + X_6 \delta_{26} + X_7 \delta_{27} \\
 & \quad + X_8 \delta_{28} + X_9 \delta_{29} - Y_0 + \Delta_{2p} = 0 \\
 & X_0 \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + X_5 \delta_{35} + X_6 \delta_{36} + X_7 \delta_{37} \\
 & \quad + X_8 \delta_{38} + X_9 \delta_{39} - Y_0 + \Delta_{3p} = 0 \\
 & X_0 \delta_{40} + X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + X_5 \delta_{45} + X_6 \delta_{46} + X_7 \delta_{47} \\
 & \quad + X_8 \delta_{48} + X_9 \delta_{49} - Y_0 + \Delta_{4p} = 0 \\
 & X_1 \delta_{51} + X_2 \delta_{52} + X_3 \delta_{53} + X_4 \delta_{54} + X_5 \delta_{55} + X_6 \delta_{56} + X_7 \delta_{57} \\
 & \quad + X_8 \delta_{58} + X_9 \delta_{59} + \Delta_{5p} = 0 \\
 & X_1 \delta_{61} + X_2 \delta_{62} + X_3 \delta_{63} + X_4 \delta_{64} + X_5 \delta_{65} + X_6 \delta_{66} + X_7 \delta_{67} \\
 & \quad + X_8 \delta_{68} + X_9 \delta_{69} + \Delta_{6p} = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

*徐芝伦:《弹性理论》, 21页

$$\begin{aligned}
 & X_1\delta_{71} + X_2\delta_{72} + X_3\delta_{73} + X_4\delta_{74} + X_5\delta_{75} + X_6\delta_{76} + X_7\delta_{77} \\
 & \quad + X_8\delta_{78} + X_9\delta_{79} + \Delta_{7p} = 0 \\
 & X_1\delta_{81} + X_2\delta_{82} + X_3\delta_{83} + X_4\delta_{84} + X_5\delta_{85} + X_6\delta_{86} + X_7\delta_{87} \\
 & \quad + X_8\delta_{88} + X_9\delta_{89} + \Delta_{8p} = 0 \\
 & X_1\delta_{91} + X_2\delta_{92} + X_3\delta_{93} + X_4\delta_{94} + X_5\delta_{95} + X_6\delta_{96} + X_7\delta_{97} \\
 & \quad + X_8\delta_{98} + X_9\delta_{99} + \Delta_{9p} = 0 \\
 & X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - \frac{\Sigma P}{2} = 0
 \end{aligned}$$

上式中最后一个方程是根据外力内力平衡的条件建立。其它各方程系根据任一切口或链杆处的相对变位为零的条件建立。式中系数 δ_{ki} 表示了在 i 切口有一对相背的单位力 $X_i = 1$ 作用时在切口 K 处引起的相对变位。而 Δ_{kp} 则表示由于荷载 P 的作用使 K 点产生的变位。

二、考虑剪切变形时，形、载常数的计算

因考虑节点刚度的影响，上述两种变位可查表或用图乘法求得。有以下几种情况：

1. 在 $X_0 = 1$ 作用下，结构在 $X_5 \cdots X_9$ 方向不产生相对变形，所以

$$\delta_{05} = \delta_{06} = \delta_{07} = \delta_{08} = \delta_{09} = 0$$

2. 计算在 $X_0 \cdots X_4$ 等单位力作用下的结构沿 $X_0 \cdots X_4$ 方向的变位时，应考虑基础沉降，其变位公式可写成：

$$\delta_{ki}^{M^0} = F_{ki} + K\omega_{ki}^M + \beta\omega_{ki}^Q \quad (6)$$

式中 F_{ki} 为当 $X_i = 1$ 作用于地基的 i 处时，在地基 K 点的相对沉降。由弹性理论算出的 F_{ki} 值可直接查表求得*。而 $K\omega_{ki}^M$ 及 $\beta\omega_{ki}^Q$ 分别为悬臂梁在 i 处加一单位力时，在结构的 K 点处产生的弯曲变位及剪切变位。这里

$$\beta = \frac{\lambda\pi E_0}{GF(1-\mu_0^2)} \quad (7)$$

3. 当计算 $X_1 \cdots X_9$ 等单位力作用下沿 $X_5 \cdots X_9$ 方向的变位时，仍可利用(6)式，不过应去掉 F_{ki} 项，因为这些变位与基础的沉降无关。

$$\delta_{ki}^{M^0} = K\omega_{ki}^M + \beta\omega_{ki}^Q \quad (8)$$

4. Δ_{ki} 为由荷载引起的相对变位，与基础沉降无关，仍可用(8)式求出。如：

$$\begin{aligned}
 \delta_{13}^{M^0} &= F_{13} + K_1\omega_{13}^M + \beta_1\omega_{13}^Q \\
 &= -4.751 - 6.154 + 0.5C^2(3C - \frac{C}{3})K_1 + \beta_1C \\
 &= -10.6343 \quad (\text{详见图3、图4})
 \end{aligned}$$

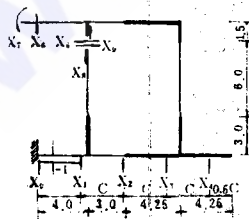
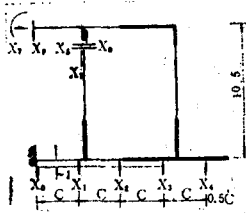
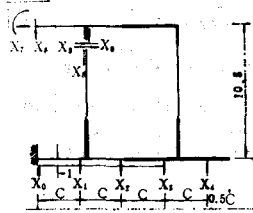
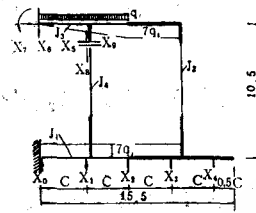


图3 Q1图

*见潘家铮：《弹性地基上的梁和框架》表54

$$\delta_{15}^{MQ} = K_1 \times 0.5C^2 \times \frac{C}{3} - \beta_1 C = -0.0738 \quad (\text{详见图3, 图5})$$

图4 \bar{Q}^3 图图5 \bar{Q}^5 图图6 Q_{q1} 图

用同样方法, 可算出各载常数, 如

$$\begin{aligned} M_{5q_1}^{MQ} &= 12.4869q_1 + 7^2\beta_1q_1 + 0.5 \times 7^2\beta_3q_1 \\ &= 15.2092q_1 \quad (\text{详见图3、图6}) \end{aligned}$$

求出各形、载常数后, 将其分别代入(5)式, 即可解得各未知力。例如, 当结构承受 $q_1=9.18$ 吨/米时, 如果考虑弯曲和剪切变形, 法方程组可写为(6)式。

$$\begin{aligned} -6.592 X_1 - 9.502 X_2 - 11.148 X_3 - 12.308 X_4 - Y_0 &= 0 \\ -6.592 X_0 - 4.612 X_1 - 8.665 X_2 - 10.634 X_3 - 11.840 X_4 - 0.074 X_5 \\ + 0.2 X_6 + 0.019 X_7 & \quad \quad \quad - Y_0 = -9.03 \\ -9.502 X_0 - 8.665 X_1 - 5.613 X_2 - 9.094 X_3 - 10.652 X_4 - 0.016 X_5 \\ + 0.8 X_6 + 0.076 X_7 + 0.067 X_8 + 0.121 X_9 - Y_0 &= -18.19 \\ -11.148 X_0 - 10.634 X_1 - 9.094 X_2 - 5.631 X_3 - 8.714 X_4 + 0.251 X_5 \\ + 1.613 X_6 + 0.154 X_7 + 0.021 X_8 + 0.419 X_9 - Y_0 &= -18.39 \\ -12.308 X_0 - 11.840 X_1 - 10.652 X_2 - 8.714 X_3 - 4.883 X_4 + 0.552 X_5 \\ + 2.426 X_6 + 0.231 X_7 - 0.029 X_8 + 0.718 X_9 - Y_0 &= -18.40 \\ -0.074 X_1 - 0.016 X_2 + 0.251 X_3 + 0.522 X_4 + 4.745 X_5 + 1.169 X_6 \\ + 0.784 X_7 - 1.250 X_8 + 0.07 X_9 & \quad \quad \quad = 139.62 \quad (6) \\ 0.2 X_1 + 0.8 X_2 + 1.613 X_3 + 2.426 X_4 + 1.169 X_5 + 2.753 X_6 \\ + 0.267 X_7 - 0.373 X_8 + 1.14 X_9 & \quad \quad \quad = 15.18 \\ 0.019 X_1 + 0.076 X_2 + 0.154 X_3 + 0.231 X_4 + 0.784 X_5 + 0.267 X_6 \\ + 0.209 X_7 - 0.179 X_8 - 0.009 X_9 & \quad \quad \quad = 16.85 \\ 0.067 X_2 + 0.021 X_3 - 0.029 X_4 - 1.25 X_5 - 0.373 X_6 \\ - 0.179 X_7 + 0.866 X_8 - 0.104 X_9 & \quad \quad \quad = -59.92 \\ 0.121 X_2 + 0.419 X_3 + 0.718 X_4 + 0.07 X_5 + 1.14 X_6 \\ - 0.009 X_7 - 0.104 X_8 + 52.121 X_9 & \quad \quad \quad = 4.81 \\ X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 & \quad \quad \quad = 64.26 \end{aligned}$$

三、剪切变形对结构变位及应力的影响幅度

剪切变形使杆件产生断面间的相对滑移，当断面较大时，它对结构的变形和应力影响较大。对于弹性地基上的建筑物，由于涉及地基变位和应力的重新分布，剪切变形对应力的影响出现了较为复杂的情况。

1. 只有与某杆轴垂直(或有垂直分力)的荷载和单位力才使该杆件产生剪切变形。本例中的 $\beta\omega_{2s}^Q, \beta\omega_{1s}^Q$ 等均为零。

2. 在所谓“深梁”的杆件上，那些与基础沉陷无关的形、载常数受剪切变形影响较大。这不但反映在绝对值的大小比例上，更值得注意的是它往往改变了变位的符号。变位符号的变化不能简单地理解成只是数量的增减，当他们的量增减到了一定程度时，就会引起质的变化(如拉杆变压杆，受压区变成受拉区等)。在本例中，系数项变化较大的如：

$$\text{弯曲变形 } \delta_{1s}^M = 0.0219; \quad \text{剪切变形 } \beta\omega_{1s}^Q = -0.0957.$$

$$\text{弯曲变形 } \delta_{2s}^M = 0.175; \quad \text{剪切变形 } \beta\omega_{2s}^Q = -0.1914.$$

$$\text{弯曲变形 } \delta_{2s}^M = -0.0129; \quad \text{剪切变形 } \beta\omega_{2s}^Q = 0.0803.$$

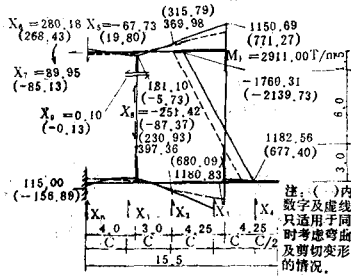
$$\text{弯曲变形 } \delta_{3s}^M = 0.4458; \quad \text{剪切变形 } \beta\omega_{3s}^Q = -0.1945.$$

$$\text{弯曲变形 } \delta_{3s}^M = -0.0626; \quad \text{剪切变形 } \beta\omega_{3s}^Q = 0.0833.$$

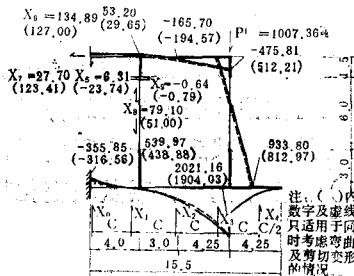
$$\text{弯曲变形 } \Delta_{q_2}^M = -0.3212q_2; \quad \text{剪切变形 } \beta\omega_{q_2}^Q = 0.6806q_2.$$

3. 形常数是结构变位的基本特性值，它是结构变化(应力、应变等变化)的内在因素。设想以一强度相同的荷载分别作用于跨度相同的梁及拱上，这两种结构的变形、应力情况亦大不相同。本文算例中，集中弯矩荷载 $M_1 = 2911.00$ 吨·米并不垂直于任何杆件，因而剪切变形对载常数没有影响，即 $\Delta_{KM_1}^M = \Delta_{KM_1}^{MQ}$ 。考虑剪切变形后列出的在 M_1 荷作用下的法方程及其解答，反映了形常数的变化对结构应力的影响，这种影响仍然是很大的。

在 M_1 荷作用下，当只考虑弯曲变形时， $Y_0 = 3.5$ (表示基础中部略高于原高程)。 X_5 为负值，中墩为压杆。在结构中心线附近上顶板外缘受拉($X_7 = 89.95$ 吨·米，正值)，下底板也是外缘受拉($M_1 = 115.00$ 吨·米)。当同时考虑弯曲和剪切变形时， $Y_0 = -17.72$ 。这时中墩为拉杆(X_5 为正值)； $X_7 = -85.13$ 吨·米(内缘受拉)，下底板中点处的弯矩也由正值变为负值($M_1 = -156.89$ 吨·米)。这一正一负，一拉一压，反映了因剪切变形引起的形常数的变化对结构应力的影响(详见图7)。

图7 承受 M_1 荷载时 M图

比例: 1厘米=100吨·米

图8 承受 P_1 荷时M图

比例: 1厘米=100吨米

4. 考虑剪切变形影响后, 哪些部位的形常数变化大, 哪种荷载的载常数变化大, 在该荷载作用下, 那里的应力变化相应也大。

以承受 $P_1=1007.36$ 吨的荷载为例(图2.8), 考虑了剪切变形后, X_5 、 X_8 、 X_7 等未知力变化很大。

只考虑弯曲变形时。

$$X_5=6.13, X_8=79.10, X_7=27.70$$

考虑弯曲和剪切变形时:

$$X_5=-23.74, X_8=51.00, X_7=123.41$$

这是因为剪切变形对有关的载常数影响较大(如 $\Delta_{5P_1}^M = -0.5179P_1$, 而 $\Delta_{5P_1}^{MQ} = -0.3234P_1$, 相差38%; $\Delta_{8P_1}^M = 0.0759P_1$, 而 $\Delta_{8P_1}^{MQ} = -0.0074P_1$

相差-110%), 加之相应的形常数 S_{54} 、 S_{84} 等(X_4 对 X_5 、 X_8 的影响和 P_1 荷相似)受剪切变形影响

也较大, 因而解出的 X_5 、 X_8 的数值变化就大。 X_5 值由正号变为负号说明中墩由拉杆变为压杆, 对上顶板的顶托作用加大许多, 因而 X_7 值也相应加大许多。 X_5 既是中墩的轴力一半同时也是上顶板中点处的切力。也就是说, 在 P_1 荷作用下, 考虑剪切变形后中上顶板中部的切力值(X_5)相差为-487%, 而该点的力矩(X_7)相差346%。

同样, 在 P_2 荷(图2)作用下, $\Delta_{5P_2}^M$ 与 $\Delta_{5P_2}^{MQ}$ 的数值相差很大, 与其相应的形常数 δ_{15} 、 δ_{25} 值也受剪切变形的影响改变了符号, 未知力 X_5 及 X_7 的数值因而也有较大变化(上顶板中点处的切力相差-145%, 弯矩相差-633%)。

只考虑弯曲变形时:

$$\Delta_{5P_2}^M = -0.0343P_2, \delta_{15}^M = 0.219, \delta_{25}^M = 0.1750$$

$$X_5 = -1.44 \quad X_7 = 0.98$$

考虑弯曲和剪切变形时:

$$\Delta_{5P_2}^{MQ} = 0.0768P_2, \delta_{15}^{MQ} = -0.0738, \delta_{25}^{MQ} = -0.0164$$

$$X_5 = 0.65 \quad X_7 = -5.22$$

5. 由于受基础沉陷的影响, 在与基础沉陷有关的形常数中, 剪切变形所占的比例相应较小。因而地基反力相对变化幅度较小。例如:

$$\begin{aligned} \delta_{14}^{MQ} &= F_{14} \pm K\omega_{14} \pm B\omega_{14} \\ &= -5.574 - 6.602 + 0.2406 + 0.0957 = 11.8397 \end{aligned}$$

变位值主要由 F_{14} 值控制, 剪切变形为总变形值的1%弱。尽管其它未知值(X_5 、 X_6 ……, X_9)有较大变化, 相应部位的应力也有较大变化, 但地基反力的差别总的来

说相应较小。

四、结 论

剪切变形对弹性地基与建筑物的变形和应力的影响较大，涉及因素较多。如：

1. 结构断面愈大，剪切变形所占比重愈大，应力也随之有较大变化。这是因莫尔公式中弯曲变形项的分母二值是随断面高度 h 值呈三次关系增长，而剪切变位项分母中 F 值仅随 h 值呈一次关系增长。

2. 剪切变形对应力的影响幅度与结构型式有关。对于弹性地基上的梁，一般说，应力变化幅度甚小。

因为这时基础的沉降起主要控制作用，而基本系统的变化所占比例很小。而对于框架，尤以多层框架就大不一样。剪切变形对框架的地基反力虽然影响不大，而对框架墙、顶板横杆等部位的变形和应力影响就比较大。本文算例中，这些地方的变位增减高达3—5倍（而不是百分之三十左右），应力相差有时高达6倍多。

地基的 E 值越大，结构混凝土标号越低，剪切变形所占比重也越大，其对应力的影响也越大。笔者曾把本文算例中之框架地基 E 值提高10倍后以相同荷载计算应力，结果是结构各部位应力条件虽有一定改善，但剪切变形对应力的影响幅度却稍有增加。

3. 不同荷载，不同断面位置，剪切变形对应力的影响也不相同，其影响幅度，符号也不尽相同，有些地方应力叠加；有些地方应力抵消。因而在计算时应具体分析，找出应力的控制因素。例如当只考虑自重荷（图2中之 P_1 、 P_2 、 P_3 、 q_1 、 q_2 ）作用时：

只考虑弯曲变形；考虑弯曲，剪切变形

$$X_1=30.16\text{吨}\cdot\text{米}、X_2=54.94\text{吨}；X_7=81.39\text{吨}\cdot\text{米}、X_8=56.54\text{吨}$$

应力变化幅度不大。当考虑全部荷载后（即除了各项 P 荷载及 q 荷载外还加 M_1 荷及 H_1 荷）其应力为：

只考虑弯曲变形时；考虑弯曲，剪切变形

$$X_7=120.12\text{吨}\cdot\text{米}、X_8=-196.47\text{吨}；X_7=-3.72\text{吨}\cdot\text{米}、X_8=-30.83\text{吨}$$

（外缘受拉） （隔墩为拉杆） （内缘受拉）

应力变化就比较大，由于隔墩拉力的减少，上顶板中部弯矩改变了符号（图2，图3）。