

在洪水汇流计算中 用坐标转换法作非线性改正

成都水力发电学校 毛启平

在洪水汇流计算中,考虑非线性作用的方法不少,但一般比较复杂,不便于实际应用,有的又因过分简单而精度不高。

我们在求解简化非线性圣维南方程组中,采用了“变动定比”有限差的办法,得到与简化线性圣维南方程组解的相似结果,并由此导得线性和非线性两种演算系统之间的坐标转换关系,可把常用线性法演算的成果改正为非线性成果。方法简捷,便于应用。

由于非线性汇流的复杂性,为了实用,推演过程中不得不作必要的近似处理,以简化计算方法,一般情况下,应尽可能使这种近似对精度不会有太大影响。

一 基本原理

设简化的非线性圣维南方程组为:

$$\frac{dW_N}{dt} = I - Q_N \quad (1)$$

$$W_N = f(Q_N) \quad (2)$$

式中: I——输入流量;
Q——输出流量;
W——槽蓄量。

(式中符号,凡标有“L”者表示线性值,标有“N”者表示非线性值。)

(2) 式为非线性蓄泄关系,将(2)式对时间微分得:

$$\frac{dW_N}{dt} = \tau(Q_N) \frac{dQ_N}{dt} \quad (3)$$

$$\tau(Q_N) = \frac{df(Q_N)}{dQ_N} \quad (4)$$

$\tau(Q_N)$ 为演算河段的传播历时,随出流量 Q_N 的变化而变化,它是代表非线性汇流特性的基本参数。

令输入流量 I 在 $0 \sim t_N$ 内为常数,将(3)式代入(1)式,并取零为初始条件求解微分方程得:

$$Q_N = I \left(1 - e^{-\int_0^{t_N} \frac{dt}{\tau}} \right) \quad (5)$$

式中 $\left(1 - e^{-\int_0^{t_N} \frac{dt}{\tau}} \right)$ 为变动积分汇流曲线, 依 Q_N 而变。把式中时间微分量 dt 按“变动定比”原则向前取有限差 Δt_N , 使之与该时段内平均传播历时 $\bar{\tau}$ 之比值恒为常数, 即:

$$\frac{\Delta t_{N.1}}{\tau_1} = \frac{\Delta t_{N.2}}{\tau_2} = \dots = \frac{\Delta t_{N.n}}{\tau_n} k_N$$

k_N 为定比常数。再按梯形求和代表积分, 这样 (5) 式中的

$$\begin{aligned} \int_0^{t_N} \frac{dt}{\tau} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} \right) \Delta t_{N.1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \Delta t_{N.2} + \dots \\ &= \frac{\Delta t_{N.1}}{\tau_1} + \frac{\Delta t_{N.2}}{\tau_2} + \dots = n \cdot k_N \end{aligned}$$

n 为计算时段数。将上式代入 (5) 式得:

$$Q_N = I (1 - e^{-nk_N}) \quad (6)$$

(6) 式即单一河段非线性汇流演算基本公式。

如果将 (2) 式换成线性蓄泄方程, 同理可解得线性汇流演算基本公式为:

$$Q_L = I (1 - e^{-nK_L}) \quad (7)$$

式中 $(1 - e^{-nK_L})$ 为固定累积汇流曲线; $k_L = \frac{\Delta t_L}{K}$; Δt_L 线性计算时段; K 为演算河段平均传播历时, 为常数, 它是表征线性汇流特性的基本参数。

(6)、(7) 两式基本一样, 由此可以分别导得定时段和变时段单位线。现在, 我们根据二者的相似性进一步推导两种系统间的坐标转换关系。为了简化起见, 对单一河段来说, 只着重考虑第一个计算时段 (即 $n=1$) 的改正即可。这样, 实际上就把汇流的非线性改正问题, 简化为对线性出流过程线上各时段坐标增量的改正。

(一) 横标 (时间坐标) 转换法: 设非线性计算时段 $\Delta t_N (= t_{N.2} - t_{N.1})$ 内的入流量所形成的该时段末的出流量为 ΔQ_N 。在线性计算时段 $\Delta t_L (= t_{L.2} - t_{L.1})$ 内, 同一入流量在该时段末形成的出流量为 ΔQ_L 。当

$$\Delta Q_N \cdot \Delta t_N = \Delta Q_L \cdot \Delta t_L \quad (8)$$

比较 (6)、(7) 两式则有 $k_N = k_L$, 即

$$\frac{\Delta t_N}{\Delta t_L} = \frac{\tau(Q_N)}{K}$$

考虑到线性演算是以定时段 Δt_L 划分入流时段的, 故各 Δt_N 的初始时刻 $t_{N.1} = t_{L.1}$, 并且

$$\frac{\Delta t_N}{\Delta t_L} = \frac{t_{N.2} - t_{L.1}}{t_{L.2} - t_{L.1}}$$

注意到 (8) 式, 于是得:

$$t_{N.2} = \frac{\tau(Q_L)}{K} \cdot \Delta t_L + t_{L.1} \quad (9)$$

(9) 式即为横标转换关系, $\frac{\tau(Q_L)}{K}$ 为横标转换函数。应用 (9) 式作非线性改正时, 先把线性出流过程线按 Δt_L 分为若干时段, 将各时段平均流量 Q_L 及已知的 K 、 Δt_L 、 $t_{L.1}$ 代入 (9) 式计算 $t_{N.2}$, 再将 Δt_L 末时刻 $t_{L.2}$ 所相应的 $Q_{L.2}$ 水平移到 $t_{N.2}$ 位置即为 $Q_{N.2}$, 连结各时段的 $Q_{N.2}$, 即得非线性出流过程线, 如图 (1) 所示。

(二) 纵标 (流量坐标) 转换法: 设 Δt_N 内的入流量在 Δt_L 末时刻形成的出流量为 $\Delta Q_{N.} \Delta t_L$, 当

$$\Delta t_N = \Delta t_L \quad (10)$$

根据 (6)、(7) 两式, 并注意应用 (10) 式则有

$$\frac{\Delta Q_{N.} \Delta t_L}{\Delta Q_L \Delta t_L} \approx \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t_N}{\tau(Q_N)}}}{1 - e^{-\frac{\Delta t_L}{K}}} = \frac{K}{\tau(Q_N)}$$

同样考虑到线性演算是按定时段 Δt_L 划分入流时段的, 故各 $\Delta Q_{N.} \Delta t_L$ 的初始流量 $Q_{N.1} = Q_{L.1}$, 并且

$$\frac{\Delta Q_{N.} \Delta t_L}{\Delta Q_L \Delta t_L} = \frac{Q'_{N.2} - Q_{L.1}}{Q_{L.2} - Q_{L.1}}$$

于是得:

$$Q'_{N.2} = \frac{K}{\tau(Q_N)} \cdot \Delta Q_L + Q_{L.1} \quad (11)$$

(11) 式即为纵标转换关系, $\frac{K}{\tau(Q_N)}$ 为纵标转换函数。应用 (11) 式进行非线性改正时, 以各线性时段平均流量 Q_L 代替 Q_N 代入 (11) 式求算 $Q'_{N.2}$, 当所取线性时段愈短误差相对愈小。将各时段的 $Q'_{N.2}$ 点绘于时段末时刻 $t_{L.2}$ 上并连结起来即得非线性出流过程线 (见图 (1))。

两种坐标转换法的改正效果基本一致。

对于多河段串联演算情况, 可按单一河段考虑改正, 以简化计算。

为保证转换前后水量平衡, 必须使 K 等于洪水流量变幅内的平均传播时间, 即应满足

$$K = \left[\int_0^{Q_{N.m}} \tau(Q_N) dQ_N \right] / Q_{N.m} \quad (12)$$

式中: $Q_{N.m}$ 非线性洪峰流量。

二 参 数 定 量

由 (9) 和 (11) 式可知, 坐标转换关系取决于蓄泄关系的具体形式。通常情况下, 线性和非线性蓄泄关系可分别表为

$$W_L = K Q_L \quad (13)$$

$$W_N = C Q_N^m \quad (14)$$

式中: C, m ——非线性蓄泄系数和指数。

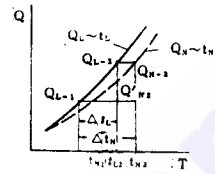


图 1 坐标转换示意图

其它符号意义同前。

K可由常用的实测流量资料分析定量, C和 m 可试算优选确定, 但初试值由两种蓄泄曲线的几何关系估算。

当满足 (12) 式时, 两种蓄泄曲线具有如图 (2) 所示的对应关系。在图中m点处, 有 $W_N = W_L$, 即有

$$K = CQ_{N,m}^{m-1} \quad (15)$$

两端取对数得 $\log K = \log C + (m-1)\log Q_{N,m}$ (16)

根据若干次实测洪水资料, 分别求出各次洪水的K和摘取洪峰

流量 $Q_{N,m}$, 在双对数纸上点绘 $\log K \sim \log Q_{N,m}$ 相关直线, 其纵标截距即为 C, 其坡度为 m。

另外, 在图 (2) 中e点处, 有 $\tau(Q_e) = K$, 即有

$$K = CmQ_e^{m-1} \quad (17)$$

联解 (15), (17) 二式得

$$\frac{1}{m^{1-m}} = \frac{Q_e}{Q_{N,m}} \quad (18)$$

式中 Q_e 为线性出流过程线与非线性出流过程线 (实测过程线) 涨洪段 (或落洪段) 上的交叉流量, 可在线性演算成果与实测成果对比图上确定。将 Q_e 和 $Q_{N,m}$ 代入 (18) 式求算 m, 再由 (15) 式或 (17) 式求算 C。

各次洪水初定参数变化不大时, 可取平均值应用; 如变化太大, 表明蓄泄关系不完全符合 (14) 式概化, 应改变概化型式。

三 实 例

沱江三皇庙——登赢岩河段, $L = 202$ 公里, 1978 年 7 月 14 日洪水区入流很小, 可看作无旁侧入流的河槽汇流情况。用特征河长法作线性演算, 经以往长期预报分析选用的线性参数为: $K = 20$ 小时, $x = 0.48$, $l = 8.12$ 公里, $\angle t_L = 4$ 小时。线性演算结果列入附表中第 ④ 栏。与实测资料比较, 本成果具有起涨提前, 1120 米³/秒以下 $Q_L > Q_N$, 以上 $Q_L < Q_N$ 的特点, 反映了非线性作用的存在, 现以 (14) 式概化河段槽蓄特性, 并且考虑到 K 是 $Q_{基}$ 以上平均传播历时, 所以, 参数应扣除 $Q_{基}$ 后求算。经分析选定: $Q_{基} = 140$ 米³/秒, $Q_e = 1120$ 米³/秒, $Q_{N,m} = 3110$ 米³/秒 (比值在计算时段之间, 表中未列出), 由 (18) 式求得 $m = 0.80$, 由 (15) 式求得 $C = 100(\text{米}^3)^{0.2} \cdot (\text{秒})^{0.8}$ 。采用纵标转换和横标转换作非线性改正, 其成果列入附表 ⑤ 栏和 ⑩ 栏。为便于相互比较, 前者是按线性横标 t_L 位置摘取的数值。由表可见, 经非线性改正后的成果精度有普遍提高, 并且两种改正方法的改正成果也基本一致。

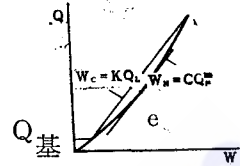


图 2 两种蓄泄曲线对应关系图

沱江三皇庙—登赢岩1978年7月14日洪水演算表

月.日.时	I (米 ³ /秒)	I (米 ³ /秒)	Q _L (米 ³ /秒)	Q _L (米 ³ /秒)	Q _L (米 ³ /秒)	ΔQ _L = Q _{L2} - Q _{L1}	横标转换法		纵标转换法		Q _测 (米 ³ /秒)
							τ(Q _L)/K	Q _N	K/τ(Q _L)	Q' _N	
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	
7.13.12	180	770	140								
.16	1360	2090	140								
.20	2820	3065	140	152	24	1.46	140	0.68	140	140	140
.24	3310	3215	164	240	151	1.34	160	0.75	160	160	160
14.4	3120	3960	315	540	450	1.14	230	0.88	280	160	160
.8	2800	2590	765	1148	767	0.98	660	1.02	710	160	160
.12	2380	2190	1532	1932	799	0.88	1540	1.14	1550	1580	1580
.16	2000	1900	2331	2576	491	0.83	2480	1.20	2440	2480	2480
.20	1800	1700	2822	2862	80	0.81	2900	1.23	2920	2920	2920
.24	1600	1490	2902	2802	-200	0.82	2880	1.22	2920	2940	2940
15.4	1380	1300	2702	2546	-311	0.83	2660	1.20	2660	2700	2700
.8	1220	1145	2391	2235	-312	0.86	2320	1.20	2330	2330	2330
.12	1070	1000	2079	1948	-263	0.88	2040	1.16	2030	2000	2000
.16	930	1045	1816	1705	-222	0.90	1800	1.14	1780	1790	1790
.20	1160	1210	1594	1498	-192	0.93	1540	1.11	1570	1530	1530
16.24	1260	1180	1402	1318	-167	0.95	1380	1.02	1390	1430	1430
.4	1100	1035	1235	1178	-115	0.97	1220	1.03	1230	1240	1240
.8	970	925	1120	1103	-34	0.99	1110	1.01	1120	1130	1130
.12	880	840	1086	1100	28	0.99	1070	1.01	1090	1050	1050
.16	800	840	1114	1100			1100	1.01	1110	1130	1130